Ф. Клейн

# ЛЕКЦИИ О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ В XIX СТОЛЕТИИ

II

Институт Компьютерных Исследований

DIE GRUNDLEHREN DER

# MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE HAMBURG — M. BORN GÖTTINGEN — C. RUNGE† GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT

GÖTTINGEN

BAND XXV

# VORLESUNGEN ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IM 19. JAHRHUNDERT

TEIL II

VON

FELIX KLEIN

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1927

Ф. Клейн

# ЛЕКЦИИ О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ В XIX СТОЛЕТИИ

## ТОМ 2

Перевод с немецкого В. А. Антонова
под редакцией Б. П. Кондратьева

Институт Компьютерных Исследований

Москва ♦ Ижевск

2003

УДК 519



РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №02-01-14125.

**Клейн Ф.**

Лекции о развитии математики в XIX столетии. Том 2. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 240 стр.

Первый том книги Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии» дважды издавался на русском языке (последнее издание вышло в издательство «Наука» в 1989 г.). Однако перевод второго тома так и не был сделан. Вместе с тем в нем обсуждаются интересные вопросы теории относительности (как специальной, так и общей) и ее геометрической интерпретации.

Книга представляет большой интерес для физиков, математиков, специалистов и студентов, а также для историков науки.

**ISBN 5-93972-208-3**



**http://rcd.ru**

# Оглавление

# О втором томе Ф. Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии»

При знакомстве с научными теориями нередко возникает впечатление, будто появляются они уже законченными и совершенными. Но это иллюзия! Кто, глядя на невзрачное семя или икринку, заранее признает, что из них произрастет здоровое растение или рыба. Так и в мире науки, сложном и многогранном, теории рождаются, лучшие из них проходят этап становления (а многие умирают, едва успев родиться) и только затем проявляют себя в полном блеске, объясняя и предсказывая явления вокруг нас.

Книга, которую вы держите в руках, впервые переведена на русский язык и представляет собой второй том знаменитых «Лекций». Ее автор — крупный математик и мастер научного слова Феликс Клейн. В ней прослеживаются пути развития важных разделов современной математической и теоретической физики. Характерной особенностью всего произведения является описание внутренних глубоких взаимосвязей между далекими, казалось бы, друг от друга теориями.

В научной биографии Клейна было немало ярких моментов. Одним из них стала его Эрлангенская программа, предложенная научному миру в 1872 году. Она подвела некую глубокую черту в развитии геометрии и повернула мысль от геометрии проективной к геометрии преобразований, опирающейся на понятие группы. В книге прослеживается влияние фундаментальных идей Эрлангенской программы на возникновение и развитие новой механики, электродинамики и теории относительности. Оказывается, в идейном отношении математики во многом предвосхитили развитие физики. Здесь уместно вспомнить слова, сказанные Германом Минковским: «...физик должен изобретать эти понятия отчасти вновь и при этом усердно пробивать себе тропу через дремучий лес неясностей, хотя совсем рядом выводит нас вперед отличная дорога, проложенная математиком». Сказанное относится, в частности, и к теории относительности. Клейн убедительно показывает, что самые глубокие положения математического аппарата этой знаменитой теории оказываются неразрывно связанными с его Эрлангенской программой.

В логическом и историческом плане данной книге предшествовал первый том «Лекций», где Клейн с замечательным мастерством дает широкую панораму развития мировой математики. Не случайно первый том дважды, в 1933 и 1989 гг., был переведен на русский язык. Второму же тому повезло меньше. Помнится, что в одном из проспектов издательства «Наука» за 1989 год объявлялось и о выходе второго тома, однако он так и не появился на прилавках магазинов. Этот явный пробел в историографии науки и восполняет данная книга.

Второй том написан неравномерно, ему присуща некоторая лоскутность изложения материала. Некоторые места изложены в ней чересчур дотошно, в других же — мысль скачет галопом по Европам. Например, Клейн хвалит Софуса Ли, но что сделал последний — не отмечает. Автор охотнее всего излагает то, на что он сам оказал влияние. Именно поэтому в книге ничего не говорится о квантовой механике. Язык Клейна, пластичный и образный, местами обнаруживает недостаток литературной обработки. Однако в целом стиль изложения Клейна, как всегда, четкий и ясный.

В книге показано, как постепенно формировались понятия в науке, почему одни из них оказались необходимыми, другие же исчезали бесследно. С интересом я узнал, например, что слово «электрон» произошло от слова «электронион», а шести-тензор в электродинамике вначале фигурировал под названием «трактор». Как математик, Клейн под теорией относительности понимает именно теорию инвариантов по отношению к представленной группе линейных и нелинейных подстановок. В частности, понятие одновременности является абсолютным по отношению к группе. При чтении книги создается впечатление, будто Клейн выступает как повивальная бабка, помогая появлению на свет новых теорий. Но не любых! Такой чести удостаиваются только те из них, которые себя уже зарекомендовали. В этом Клейн проявляет здоровый консерватизм. Книга учит нас правильной расстановке акцентов при осмыслении научного наследия, и уже это делает ее актуальной сегодня.

Терминология местами явно устарела. Вместо всюду употребляемого в книге термина «когредиентный» («контрагредиентный») сейчас принято говорить «контравариантный» («ковариантный»). В общепринятых сейчас обозначениях записаны и гиперболические функции.

Остается добавить, что перевод с немецкого вполне профессионально сделал физик и астроном В. А. Антонов. Лакмусовой бумажкой переводчика является список поправок, замеченных им в оригинале.

*Б. П. Кондратьев*

# Предисловие к немецкому изданию

Предлагаемый второй и последний том Лекций зародился в 1915–1917 гг., когда общая теория относительности овладела умами математиков и физиков. Новые теории Феликс Клейн, семидесятилетний, осваивал с исключительной энергией. Оставшиеся от этого исследовательского периода протоколы семинаров, переписка, заметки и разработки заполняют, будучи упорядочены самим Клейном, семь объемистых портфелей. Только небольшая часть этих материалов составила основу настоящего тома. Кое-что еще воспроизведено в отдельных публикациях Клейна. Однако много довольно обстоятельных уже набросков Клейн завершить не смог.

Так и остался второй том подобен фрагменту. Запланировано было систематическое продвижение от первых шагов теории инвариантов в геометрии до теории гравитации Эйнштейна. Личное участие Клейна больше относилось к предыстории учения Эйнштейна, чем к ее окончательному физическому оформлению. Такую предысторию он сумел изложить в трех главах, хотя не вполне еще приспособленных для публикации. В дальнейшем именно это было представлено к печати почти без изменений.

В четвертой главе предполагалось обсудить теорию относительности, как и гамильтонову механику с особым подчеркиванием теорий касательных преобразований Ли и непрерывных групп. В таком виде работа над этой главой, к сожалению, не была выполнена. Налицо были многочисленные наброски разных лет, но все время в такой форме, которую издатели не могли бы признать созревшей для публикации без недопустимого перемешивания собственных формулировок с тем, что идет от Клейна.

Отсутствие четвертой главы портит, правда, больше структуру книги самой по себе, чем ее значение для общественности. Теория относительности как таковая представлена, по-видимому, без пробелов. В то же время в данной книге впервые обстоятельно обсуждается, как современные понятия вырастают в логическом и историческом смысле из математики 19 столетия. Может быть, второй том в несколько большей мере, чем первый, подразумевает предварительные знания, обучение и самостоятельную проработку; биографический же элемент отступает в сравнении с первым томом на задний план.

За подготовку текста несет ответственность только младший из издателей. Как и в первом томе, проводился принцип по возможности меньше менять рукопись Клейна. Все же оказались необходимы некоторые стилистические изменения; в книге нельзя сплошь выражаться тем же языком, как в лекционных конспектах, предназначенных для ограниченного круга лиц. Содержание текста нигде не менялось. Дальнейшее развитие науки за десятилетие после написания работы Клейна, однако, потребовало некоторых дополнений; это, во-первых, те подстрочные примечания, которые, как и в первом томе, фигурируют в качестве редакторских, в отличие от собственных примечаний Клейна, во-вторых, пояснения в конце глав, обычно заранее указанные в тексте символом $^{\star}$. Эти пояснения тоже предназначены для подготовленного читателя и выдержаны в краткой форме.

При чтении корректур ценную помощь оказали Нейгебауер, Фридрихс, Леви и Грелль. Господину Д.Дж.Стрейку мы благодарны за важные практические советы при просмотре рукописей.

Геттинген, *Р.Курант*
октябрь 1927 *Ст. Кон-Фоссен*

# Введение

В конце первого тома было прояснено то значение, которое для самых различных ветвей математики в последнее десятилетие приобрело учение о прерывных группах преобразований и об «автоморфных» функциях, сохраняющих при них свои значения неизменными.

Обратившись теперь в другую сторону, мы видим, что в ту же эпоху не меньшее развитие и значимость приобрели непрерывные группы преобразований. От далеко идущих работ Ли (*Li*), которые начались в 1870 г. как чисто геометрические исследования и вскоре стали значимыми для обширной области дифференциальных уравнений, отступим еще несколько назад во времени. Там мы должны отталкиваться, скорее, от реферата, который был дан в т. I, гл. IV о развитии «алгебраической геометрии». Согласно принципам, которые я развил в своей Эрлангенской программе (1872), та или иная система используемых понятий зависит от подходящей подразумеваемой теории инвариантов групп простых линейных преобразований. Тут произошло кое-что примечательное. Классификация геометрических теорий по виду группы преобразований, лежащей в их основе, распространилась конкретно на область механики и математической физики, где оказалась надежной путеводной нитью для понимания идей, вышедших сегодня на первый план. Я имею в виду те рассуждения, которые сейчас объединяют под именем теории относительности. Сперва они возникли вполне независимо от работ геометров: через развитие хода мыслей, пробуждаемых электромагнитной концепцией Максвелла (*Maxwell*). Что эти обсуждения привели непроизвольно к формулировкам, совершенно сходным с нашими чисто математическими понятиями, это один из замечательных примеров той однозначной обусловленности существенных продвижений математической мысли, которая проступает снова и снова, несмотря на всю специализацию новейших направлений исследований. Раскрывать подобный параллелизм — это слишком близко сфере моих интересов, чтобы я мог пройти мимо него. Я тем более имею право задержаться на этом, что однажды уже — т. I, гл. V — затронул развитие механики и математической физики до работ Максвелла включительно. Предмет даваемого далее обозрения как раз и обозначается двумя подглавами [Механика и Математическая физика], которые раздельно, но рядом друг с другом составляют указанную главу т. I. В то же время я намерен осветить основные идеи Эрлангенской программы таким образом, чтобы подвести надежную основу под следующее затем обсуждение работ Ли.

Достижение так поставленной цели требует, конечно, известной подготовки. Чтобы дело не свелось совсем уж к общим высказываниям, необходимо, наверно, несколько более точное знание хотя бы элементов общей теории линейных инвариантов. Таким образом, я начинаю с соответствующих разъяснений, оживляя их время от времени по ходу дела включением исторических замечаний. Не удается совсем избежать перекрытия с изложением т. I, однако выбор материала имеет совсем другую направленность, и оценивание личностей как таковых отходит на задний план.

Глава 1

# Элементарное введение в основные понятия теории линейных инвариантов

## А. Построение общей теории линейных инвариантов

### § 1. Линейные подстановки. Понятие инварианта[1]

Сначала вводим какие-нибудь $n$ величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

как первичные переменные. Пусть они подвергаются произвольным, унимодулярным$^\star$, однородным линейным подстановкам

$$\begin{array}{l} x_1 = s_{11}x_1' + \ldots + s_{1n}x_n' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = s_{n1}x_1' + \ldots + s_{nn}x_n' \end{array} \qquad |s_{ik}| = 1. \tag{1}$$

[1]Как сжатый и для наших целей особенно пригодный учебник следует рекомендовать Bôcher. Einführung in die höhere Algebra («Введение в высшую алгебру») сперва по-английски, Нью-Йорк, 1907, по-немецки, Лейпциг, 1910, 2-е издание, 1925. С другой стороны назову первый том собрания сочинений Сильвестра (Кембридж 1904). Там помещена на с.198-202 краткая заметка из Cambridge and Dublin Math. Journal IV (1851), озаглавленная «On the general theory of associated algebraic forms», где впервые вводится термин «инвариант». Далее со с.284 более длинная, к сожалению, оставшаяся незавершенной работа «On the principles of the calculus of forms (Cambridge and Dublin Math. Journal VII [1852])», где впервые встречаются выражения «когредиентный» и «контрагредиентный», как и некоторые другие используемые с тех пор. — *Прим. изд.*: Вышла затем: Weitzenböck. Invariantentheorie («Теория инвариантов»). Groningen 1922.

«Когредиентными» в таком случае называют совокупности переменных

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

или

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \quad \text{и т. д.,}$$

которые соответственно претерпевают те же самые подстановки (1).

К «контрагредиентным» совокупностям переменных приходим, если рассмотреть линейную форму

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n,$$

которую подстановкой (1) мы желаем перевести в

$$u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + \ldots + u'_nx'_n.$$

Имея в виду выражения всех $x$ посредством (1) через $x'$, сравниваем коэффициенты при различных $x'$ и получаем

$$\begin{aligned} u'_1 &= s_{11}u_1 + s_{21}u_2 + \ldots + s_{n1}u_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u'_n &= s_{1n}u_1 + s_{2n}u_2 + \ldots + s_{nn}u_n. \end{aligned} \tag{2}$$

В сравнении с (1) оказываются переставленными новые переменные со старыми, а строки таблицы коэффициентов со столбцами, в этом и заключается сущность контрагредиентности. Очевидно, подстановки (1) и (2) находятся в отношении взаимности друг к другу. Мы могли бы вместо $x$ точно так же начать с величин $u$ (или с каких-нибудь когредиентных к ним величин, которые мы впоследствии будем обозначать $v$ или $w$,...). Это принцип дуальности.

Из таких величин, как $x$ или $u$, мы далее можем составить другие, которые точно так же испытывают однородные линейные унимодулярные подстановки как следствие (1) или (2). В частности, это могут быть члены 2-й степени

$$x_1^2,\ 2x_1x_2,\ x_2^2, \ldots, x_n^2$$

или также билинейные комбинации из двух совокупностей когредиентных переменных

$$x_1y_1,\ (x_1y_2 + x_2y_1),\ x_2y_2, \ldots, x_ny_n,$$

как и

$$(x_1y_2 - x_2y_1),\ (x_1y_3 - x_3y_1), \ldots, (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}).$$

Мы говорим, что (1) или (2) *индуцируют* другие подстановки, претерпеваемые написанными комбинациями. Эти индуцированные подстановки уже не обязательно оказываются наиболее общими линейными подстановками своего вида. Но понятие когредиентности и контрагредиентности на них переносится.

Возьмем, например, квадратичную форму

$$f(a, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

и потребуем, чтобы $f(a, x)$ переходила за счет (1) в $f(a'_1 x'_1) = a'_{11}x_1'^2 + \ldots + a'_{nn}x_n'^2$, тогда

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{22}, \ldots a_{nn}$$

оказываются контрагредиентными к

$$x_1^2,\ 2x_1x_2,\ x_2^2 \ldots x_n^2.$$

Специальным примером такой квадратичной формы служит квадрат линейной формы

$$(u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n)^2;$$

тут мы заключаем, что

$$u_1^2, u_1u_2, u_2^2, \ldots, u_n^2$$

когредиентны к

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{nn}.$$

(Желательно продумать детали рассуждения. Следует принять во внимание, что среди $x_1^2, x_1x_2, \ldots$, как и среди $u_1^2, u_1u_2, \ldots$, нет полной независимости, но есть *линейная* независимость$^\star$.)

Любой набор конечного числа $N$ линейно независимых величин, испытывающих однородные линейные подстановки согласно (1) или (2), мы вслед за Сильвестром (Silvester) называем *комплексом*[1]. Цель общей теории линейных инвариантов, прослеживаемую с ее основания, можно обозначить теперь следующим образом: даны какие-нибудь комплексы величин. Требуется из них максимально общим образом составить выражения, рациональные, целые и однородные по отношению к членам каждого отдельного комплекса, притом обладающие свойством не меняться при унимодулярных подстановках (1) или (2). Незамысловатый пример определителя из $n$ совокупностей когредиентных величин

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ y_1 & y_2 \ldots y_n \\ \ldots & \ldots \\ t_1 & t_2 \ldots t_n \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \ldots u_n \\ v_1 & v_2 \ldots v_n \\ \ldots & \ldots \\ w_1 & w_2 \ldots w_n \end{vmatrix}$$

[1] Недавно также названные линейными величинами. Ср. Вейль, стр. 237.

получается тотчас простым применением теоремы об умножении определителей. Однако результатом теории, в самом деле достижимым, должно быть построение *всех* разыскиваемых инвариантов систематическими алгоритмами, исходящими от таких простейших примеров.

Невозможно — и для дальнейшего не столь уж нужно — показать здесь в точности, как выполняется обрисованная выше программа общей теории линейных инвариантов. Нечто более обстоятельное, хорошо примыкающее и по форме к нижеследующему обсуждению, можно найти, например, у Гурвица (Hurwitz) в т. 45 Math. Annalen (1894). Достаточно, если мы рассмотрим отдельные простейшие примеры комплексов и соответствующих инвариантов, чтобы убедиться в осмысленности и целесообразности данной постановки проблем.

Сперва привлечем в качестве типичных примеров комплексов *ступени геометрических величин*, введенные Грассманом (Graßmann) в его Учении о протяженности (Ausdehnungslehre, изд. 1844 и 1862).

## § 2. Грассмановы ступени

Наряду с определителем из $n$ строк когредиентных переменных $(x), (y), \ldots$ или $(u), (v), \ldots$, который является инвариантом (следовательно, сам по себе составляет комплекс), мы уже упоминали как другой пример комплекса набор двучленных определителей, которые можно выделить из прямоугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ y_1 & y_2 \ldots y_n \end{vmatrix}.$$

Такие двучленные определители, естественно, можно было бы составить и из величин $u$, $v$.

Обобщение по Грассману состоит в том, чтобы рассматривать любые комплексы, которые можно составить из $\mu$ строк когредиентных переменных $(x), (y), \ldots$ или $(u), (v), \ldots$, где $\mu$ должно последовательно приравниваться $0, 1, 2 \ldots (n-1)$.

Итак, получаем, исходя пока только из $(x), (y), \ldots$, следующую последовательность $n$ *ступеней*[1]:

[1]Что речь идет все время о «комплексах», проверяется опять согласно теореме об умножении определителей, на которую можно смотреть как на подлинную основу всей теории линейных инвариантов. — Грассмановы ступени только уже сравнительно поздно были точным образом включены в теорию инвариантов именно Клебшем: Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. Göttinger Abhandlungen, т. 17 (1872).

| | |
|---|---|
| $\mu = 0$ | простую числовую величину (как говорит Грассман), по существу то, что мы называем инвариантом; |
| $\mu = 1$ | $n$ величин $x_i$ сами по себе; |
| $\mu = 2$ | комплекс $\dfrac{n(n-1)}{2}$ двучленных миноров $(x_i y_k - x_k y_i)$; |
| $\mu = n-1$ | $n$ определителей из $(n-1)$ строк $(x)$, $(y)$, ... |

Поскольку $n$-строчный определитель, как мы уже заметили, есть инвариант, этим последовательность комплексов возвращается к своему началу.

Точно так же, исходя из $(u)\ldots$, мы получаем $n$ ступеней, отношение которых к выведенным из $(x)\ldots$ еще предстоит выяснить.

Для более подробного изложения, желая избежать чрезмерной абстрактности, мы отбираем примеры с низшими размерностями.

При $n = 2$, естественно, нет еще ничего нового.

Для $n = 3$ отметим когредиентное соответствие между определителями, построенными из двух строк

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

и контрагредиентными величинами

$$u_1,\ u_2,\ u_3.$$

Оно следует из того факта, что определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

являющийся инвариантом, можно в то же время раскрыть как линейную форму по $z$:

$$z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Очевидно, аналогичная теорема верна при любом $n$ для комплекса $(n-1)$-строчных определителей.

Следует далее специально остановиться на случае $n = 4$ (который для нас особенно важен ввиду своей роли в конструкциях современной физики). Можно считать исчерпанным вопрос о ступенях $\mu = 0, 1, 3$ из четверки $\mu = 0, 1, 2, 3$, обратив, следовательно, все внимание на оставшееся $\mu = 2$.

Положим

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \tag{3}$$

(так что $p_{ik} = -p_{ki}$). Разложив определитель с нулевым значением

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

по минорам второго порядка, заключаем, что выражение

$$P = p_{1\,2}p_{3\,4} + p_{1\,3}p_{4\,2} + p_{1\,4}p_{2\,3} \tag{3'}$$ [1]

также обращается в нуль тождество. Следовательно, индуцированные подстановки, которые претерпевают $p_{ik}$ при линейных подстановках $x, y$, должны переводить уравнение $p = 0$ само в себя. Следует заметить, что $p_{ik}$ не связаны никаким другим условием, кроме* как равенством $P = 0$. Отсюда еще один шаг до утверждения об инвариантности выражения

$$B = b_{1\,2}b_{3\,4} + b_{1\,3}b_{4\,2} + b_{1\,4}b_{2\,3}, \tag{4}$$

аналогично построенного из произвольных независимых величин $b_{ik}$, когредиентных с $p_{ik}$. Рассмотрим этот последний шаг подробнее, поскольку сходные соображения очень часто используются[2] в теории инвариантов и попутно получается промежуточный результат, на который мы еще должны позднее ссылаться.

С этой целью исходим из определителя четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

и раскрываем его по минорам второго порядка

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k,\ p'_{ik} = z_i t_k - t_i z_k,$$

что дает

$$p_{1\,2}p'_{3\,4} + p_{3\,4}p'_{1\,2} + \ldots = \sum p'_{ik}\frac{\partial P}{\partial p_{ik}}. \tag{5}$$

[1] Правило запоминания индексов слагаемых: в первом члене 1 2; 3 4. Затем циклическая перестановка последних трех индексов при неизменном первом индексе 1. — *Прим. ред.*

[2] Ср. наше примечание выше о когредиентности $u_1^2, u_1u_2, \ldots$ с $a_{1\,1}, a_{1\,2} \ldots$.

Как происходящее из нашего определителя четвертого порядка, это выражение инвариантно при условии, что $p_{ik}$ удовлетворяют уравнению $P = 0$, а $p'_{ik}$ соответствующему условию $P' = 0$. Легко убедиться, что эти квадратные уравнения $P = 0$ или $P' = 0$ неприводимы, т. е., не разлагаются на множители, которые были бы линейны по $p_{ik}$ или $p'_{ik}$. С другой стороны, $p_{ik}$ и $p'_{ik}$ входят в инвариант (5) только линейно. Поэтому операциями, не нарушающими инвариантную природу (5), от $p_{ik}$ можно перейти к более общим величинам $b_{ik}$ (произвольным в смысле несвязанности равенством $B = 0$), но сохраняющим когредиентность с $p_{ik}$, в то время как $p'_{ik}$ точно так же заменяются на когредиентные $b'_{ik}$. Допустив, наконец, совпадение (пока свободно выбиравшихся) $b'_{ik}$ с $b_{ik}$, мы устанавливаем инвариантную природу выражения $B$.

Промежуточным результатом, который можно выделить из этих кратко представленных соображений, оказывается инвариантная природа выражения (5), билинейного по $p_{ik}$ и по $p'_{ik}$. Это свидетельствует, что $p'_{ik}$ (и, стало быть, сами $p_{ik}$) контрагредиентны к $\dfrac{\partial P}{\partial p_{ik}}$, т. е. в более подробной записи

$$\begin{array}{cccccc} p_{12}, & p_{13}, & p_{14}, & p_{34}, & p_{42}, & p_{23} \\ | & | & | & | & | & | \\ p_{34}, & p_{42}, & p_{23}, & p_{12}, & p_{13}, & p_{14}. \end{array} \quad \text{контрагредиентны к}$$

Исследуем теперь (все еще при $n = 4$) грассмановы ступени, которые можно составить из величин $(u), (v), \ldots$. Мы уже знаем, что сами $(u), \ldots$ когредиентны минорам третьего порядка из $(x), (y), (z)$, и заключаем по принципу дуальности, что миноры третьего порядка из величин $(u), (v), (w)$, в свою очередь, когредиентны с $(x), \ldots$.

Остается рассмотреть миноры второго порядка $q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k$, которые, естественно, удовлетворяют уравнению $Q = q_{12}q_{34} + \ldots = 0$; они оказываются контрагредиентны к $p_{ik}$. Это проверяется по инвариантности суммы $\sum\limits_{i,k} p_{ik}q_{ik}$. Действительно, она совпадает с

$$(ux)(vy) - (vx)(uy)$$

(где $(ux), \ldots$ — обычное сокращение $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$) и, стало быть, инвариантна по своему составу.

Комбинируя это с тем, что мы уже знаем о контрагредиентности внутри набора величин $p_{ik}$, находим, что

$$\begin{array}{rcccccc} & q_{12}, & q_{13}, & q_{14}, & q_{34}, & q_{42}, & q_{23} \\ & | & | & | & | & | & | \\ \text{когредиентны с} & p_{34}, & p_{42}, & p_{23}, & p_{12}, & p_{13}, & p_{14}. \end{array}$$

Резюме: комплексы величин, выводимые из $(u), (v), \ldots$ составлением определителей, не приводят ни к каким другим типам линейных подстановок, кроме присущих комбинациям из $(x), (y) \ldots$.

Эта фундаментальная теорема, которую мы здесь доказали только для $n = 4$, выступает у Грассмана, в №112 его Учения о протяженности 1862, для произвольного $n$ в значительно более конкретизированной форме. Продолжая наше развитие идей, несколько разъясним эту форму (снова только для $n = 4$).

Исходим из 4 когредиентных строк $(x), (y), (z), (t)$, образованный которыми определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

должен равняться 1. Контрагредиентные $(u), (v)$ Грассман конкретизует как определители третьего порядка, порожденные прямоугольными матрицами

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

и утверждает, *что составленная по этим $(u), (v)$ совокупность $q_{ik}$ — это то же самое, что известные ранее $p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$* (точнее $q_{ik} = \dfrac{\partial P}{\partial p_{ik}}$).

В сущности это теорема о так называемых взаимных определителях. Но в соответствии с нашими предыдущими рассуждениями мы можем обосновать ее здесь иным образом, доказав для одного частного случая, к которому общий случай всегда можно свести подходящей линейной подстановкой (1).

Именно, пусть

$$(x) = 1, 0, 0, 0 \quad (z) = 0, 0, 0, 0$$

$$(y) = 0, 1, 0, 0 \quad (t) = 0, 0, 0, 1.$$

Тогда, как известно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

По двум первым строкам, очевидно, получаются нулевые $p_{ik}$, за исключением $p_{12}$, тогда как рассмотрение трех первых строк или строк 1,2,4 дает соответственно следующие $(u)$ или $(v)$:

$$(u) = 0, 0, 0, 1, \qquad (v) = 0, 0, -1, 0;$$

откуда так же просто получается $q_{ik} = 0$, за исключением $q_{34} = 1$. Итак, в самом деле в специальном случае выполнены равенства

$$q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}, \tag{6'}$$

и стало быть, в силу вышесказанного они должны выполняться и в общем (рассмотренном Грассманом) случае. Действительно, $q_{ik}$ когредиентны $\frac{\partial P}{\partial p_{ik}}$ при произвольных подстановках (1), и такие произвольные подстановки сводят общий случай к нашему специальному$^\star$.

## § 3. О геометрическом значении наших числовых комплексов (в особенности грассмановых ступеней)

Для геометрической интерпретации числовых систем (комплексов), которые в теории инвариантов подвергаются однородным линейным преобразованиям, мы опираемся на традицию, восходящую, видимо, к учебникам Сальмона (Salmon) или Гессе[1] (Hesse) и предписывающую, по большей части, геометрическое истолкование только *отношениям* компонентов. Следовательно, (оставляя $n = 4$) мы видим в $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ так называемые однородные точечные координаты трехмерного пространства, в $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ точно так же плоскостные координаты, в отношениях $p_{ik}$ линейчатые координаты$^\star$ и т. д. Тогда линейные подстановки (1) оказываются коллинеациями в $R_3$, а развитие соответствующих алгебраических выкладок по сути дает п р о е к т и в н у ю геометрию.

Как ни плодотворна эта интерпретация (и какой бы важной ни выглядела проективная геометрия как самостоятельная дисциплина), она все же отбрасывает определенные тонкости теории инвариантов. Действительно, интерпретируются уже не сами инварианты, а только их исчезновение. Так $ux = 0$ дает «положение объединения» точки и плоскости, хотя само выражение $ux$ остается без адекватного истолкования.

[1]Ср. т. 1, глава 4, II.

Или определитель $(x\,y\,z\,t)$ задает своим обращением в нуль условие, что четыре точки лежат в одной плоскости, но сам не поддается интерпретации.

Тем не менее кажется целесообразным (и прямо-таки навязывается подразумеваемыми физическими применениями) возвращение к наивной интерпретации, которая лежит в основе учения о протяженности Грассмана, именно, что $x_1, x_2, x_3, x_4$ надо понимать как обычные прямолинейные координаты точки в четырехмерном пространстве. Преобразования (1) оказываются тогда **аффинными** трансформациями $R_4$ при фиксированном начале координат $O$, так что $x_1, x_2, x_3, x_4$ можно понимать как координаты отрезка, достигающего точки $(x)$ из точки $O$. Определитель же $(x\,y\,z\,t)$ означает объем параллелепипеда, построенного на четырех отрезках, протянутых из $O$ в точки $(x), (y), (z), (t)$. Соответственно определители второго порядка, извлекаемые из матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

или определители третьего порядка из

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

находят свое истолкование как компоненты плоской или пространственной меры параллелограмма или параллелепипеда, опирающегося на $O$.

В рамках аффинной геометрии $R_4$ с фиксированным $O$ мы нуждаемся только в разработке системы представлений этой геометрии, чтобы иметь адекватный образ для операций теории инвариантов при $n = 4$. В этой геометрии еще нет речи о таких характерных признаках метрической геометрии, как шары или прямые углы: таковые появляются только после дополнительного задания квадратичной формы (следовательно, словами Грассмана, если мы от учения о линейной протяженности переходим на уровень полного учения о протяженности). Понятие компонентов меры стоит, однако, рассмотреть ближе. Пусть опять $p_{ik}$ — определители, выделяемые из матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}.$$

По правилам исчисления определителей все они остаются неизменными тогда и только тогда, когда $(x)$ и $(y)$ заменяются на

$$\varkappa \cdot (x) + \lambda \cdot (y), \quad \mu \cdot (x) + \nu \cdot (y)$$

при условии $\begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$. На языке теории инвариантов Сильвестра это *комбинанты* из $(x)$ и $(y)$. Геометрически, следовательно, параллелограмм $O, (x), (y)$ как плоская фигура не определен полностью числовыми компонентами, а может деформироваться определенным способом (причем одна из вершин все время остается в $O$). Сходное имеет силу для величин более высокой ступени.

Мы никак не утверждаем принципиальной противоположности «аффинного» и «проективного» истолкования теории инвариантов, но можем геометрически — по так называемому принципу проектирования и сечения — свести одно к другому. Проективная интерпретация в $R_3$ возникает из аффинной интерпретации в $R_4$, если исходящие там из $O$ фигуры подвергнуть проекции с $O$ как центром на какое-нибудь боковое $R_3$. Тогда отрезок, выходящий из $O$, дает в $R_3$ точку; двумерный линейный образ, исходящий из $O$, дает в $R_3$ прямую линию и т. д. Наконец, трактовку в $R_3$ можно и так переформулировать, чтобы открылась ясная картина аналитических выкладок. Лучше всего вернуться на момент к той специальной трактовке, которую Мебиус (Moebius) в своем барицентрическом исчислении (1827)[1] дал однородным координатам. Пусть тогда $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ интерпретируются как обычные прямолинейные координаты точки в $R_3$, а $x_4$ считается ее весом. Когда полагают просто $x_4 = 1$, определяет набор $p_{ik}$ направленную величину куска прямой в $R_3$, детерминанты третьего порядка — то же для куска плоскости, детерминат четвертого порядка задает кусок пространства. Это как раз та интерпретация грассмановых ступеней, которую я осветил в четвертой главе т. I и из которой исходил, например, в ч. II своих лекций об элементарной геометрии (1908)[2]; она обладает особенным преимуществом в механике твердых тел.

Смотря по цели, которую мы имеем в виду, подобным аналитическим выкладкам находятся приложения разного вида. Следует прислушаться к суждению, которое Плюкер (Plücker) еще в 1831 в предисловии ко второму тому своих «Аналитически-геометрических исследований» высказал следующими словами[3]:

«Я присоединяюсь к тому мнению, что анализ является наукой, существующей самостоятельно, в себе самой, вне зависимости от каких бы то ни было приложений, тогда как геометрия, так же как, с другой стороны, механика, являются только наглядным изображением соотношений в едином великом и возвышенном мироздании».

[1] Полное собр. соч., т.1, 1885.

[2] Элементарная математика с точки зрения высшей.

[3] Цитируется по т. 1 Клейна. — *Прим. ред.*

Это высказывание мы должны в дальнейшем расширить еще только в том смысле, что вслед за механикой перед нами встает охватывающая ее математическая физика. При этом было бы сэкономлено немало труда, если бы, например, то, что наработано в проективной геометрии, оказалось бы легко доступно физикам или могло ими быть переведено на их собственный язык. На это, естественно, трудно надеяться; однако далее в отдельных местах я даю подходящие указания.

## § 4. Квадратичные формы и их инварианты

О линейных формах $u_x$ в §1 уже было сказано достаточно; поговорим теперь о квадратичных формах

$$f_{xx} = \sum_{(i,\,k)}\sum a_{ik} x_i x_k = a_{1\,1} x_1^2 + 2a_{1\,2} x_1 x_2 + a_{2\,2} x_2^2 + \ldots \qquad (a_{ik} = a_{ki}). \quad (7)$$

Сразу надо заметить, что величины

$$a_{1\,1}, a_{1\,2}, a_{2\,2} \cdots$$

надо рассматривать как контрагредиентные к

$$x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2, \ldots;$$

задавая $f$, мы одновременно привязываем комплекс $a_{1\,1}, a_{1\,2}, a_{2\,2}$ к нашим прежним комплексам — $(x), (u)$, грассмановым ступеням — а в расширенной таким образом системе само $f$ занимает особое место простейшего нового инварианта.

Чтобы ссылаться на известные вещи, полезно напомнить геометрическое значение $f$ в случаях $n = 3$ и $n = 4$:

При проективном истолковании $f = 0$ означает для $n = 3$ коническое сечение, для $n = 4$ поверхность второго порядка.

При аффинном истолковании рассматриваем, ради наглядности, совокупность уравнений $f = \text{const}$ и получаем тогда при $n = 3$ семейство подобных и подобно расположенных поверхностей второго порядка, которые охватывают центральную точку $O$ таким образом, что все вписываются в один и тот же «конус» $f = 0$, точно так же при $n = 4$ в $R_4$.

Несложным приемом мы переходим от $f$ к *билинейному инварианту*, с помощью которого (оставаясь с $n = 3$) указываем при проективном истолковании «полярное сродство» относительно конического сечения $f = 0$, а при аффинной интерпретации для поверхностей второго порядка $f = \text{const}$ задаем связь «поперечник — сопряженная диаметральная плоскость». Подставим на место $(x)$ когредиентные им величины $\lambda\cdot(x)+$ $+\mu\cdot(y)$. Упорядочение $f$ по степеням $\lambda$, $\mu$ тогда дает

$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy},$$

если кратко обозначаем

$$\sum_{(i,k)}\sum a_{ik}x_i y_k = f_{xy}; \tag{7'}$$

тогда множители при $\lambda^2, 2\lambda\mu, \mu^2$ неизбежно инвариантны. Билинейный инвариант в алгебре обычно называют *полярой* формы $f$.

В $f_{xy}$ контрагредиентны, с одной стороны, $y_k$, с другой стороны, коэффициенты при них. Последним можно поэтому придать роль величин $u_k$, т. е. писать

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_k a_{k1}x_k \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u_n &= \sum_k a_{kn}x_k. \end{aligned} \tag{8}$$

В этих формулах и содержится (при проективном истолковании) правило полярного сродства, порождаемого $f$.

Дальнейшие простые инварианты получают из $f$ построением определителей. При этом можно продвигаться двумя путями. Либо рассматривают сначала определитель из коэффициентов

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

и подвергают его последовательным преобразованиям, так называемому «окаймлению» величинами $u$ или $u$ совместно с $v$ и т. д.:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & u, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix} \qquad D'' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & u_1 & v_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & u_n & v_n \\ u_1 & \dots & u_n & 0 & 0 \\ v_1 & \dots & v_n & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ и т. д.} \tag{10}$$

Очевидно, таким образом получаются формы 2-й степени относительно переменных $u_i$ или $u_i v_k - v_i u_k$ и т. д., коэффициентами же служат миноры определителя $D$.

Либо начинают, как выше при образовании поляры, и вместо $(x)$ подставляют в $f$ поочередно: $\lambda(x) + \mu(y)$, $\lambda(x) + \mu(y) + \nu(z)$, что приводит сначала к выражениям

$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy}$$
$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy} + 2\lambda\nu f_{yz} + \nu^2 f_{zz} \quad \text{и т. д.},$$

представляющим собой квадратичные формы по $\lambda$, $\mu$ или $\lambda$, $\mu$, $\nu$ и т. д. Если по этим квадратичным формам снова составить определители, получается последовательность выражений, которые я буду называть $f'$, $f''$:

$$f' = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \qquad f'' = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{и т. д} \tag{11}$$

Ясно, что здесь построены инварианты — из несомненно инвариантных элементов. Напротив, только после ряда преобразований[1] выявляется, что речь идет о формах 2-й степени относительно последовательных грассмановых величин $x_i y_k - y_i x_k$ и т. д., коэффициенты же снова представлены минорами $D$.

Положение вещей теперь таково, *что перестановка полученных* $f, f', f'' \ldots f^n$ *в обратном порядке приводит их в соответствие с другой последовательностью с чередованием знаков, именно,* $D, -D', +D'', -D''', \ldots$, *если числовые ступени на основе* $(x), (y), \ldots$ *согласно теореме Грассмана, сформулированной в §3, заменить на дополнительные числовые ступени на основе* $(u), (v), \ldots$.

Вместо предъявления общего доказательства, что увело бы нас слишком далеко, разберем пример, которым нам еще предстоит много заниматься во второй главе, именно, конкретную квадратичную форму 4 переменных:

$$f = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2.$$

Находим

$$\begin{aligned} +D &= k_1 k_2 k_3 k_4 \\ -D' &= k_1 k_2 k_3 u_4^2 + \ldots \\ +D'' &= k_1 k_2 (u_3 v_4 - v_3 u_4)^2 + \ldots \\ -D''' &= k_4 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}^2 + \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

[1]Сводящихся в конечном счете к повторяющемуся применению теоремы об умножении определителей.

и с другой стороны:

$$
\begin{aligned}
f &= k_1 x_1^2 + \ldots \\
f' &= k_1 k_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + \ldots \\
f'' &= k_1 k_2 k_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \ldots \qquad (12') \\
f''' &= k_1 k_2 k_3 k_4 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}^2
\end{aligned}
$$

в согласии с нашим утверждением*.

Проективистам такие построения в общем известны. Если $f = 0$ понимать как уравнение поверхности 2-го порядка в точечных координатах, то $f' = 0$ будет ее уравнением в линейчатых координатах, $f'' = 0$ ее уравнением в плоскостных координатах и т. д.

Продемонстрированные здесь инварианты появляются в общем виде для любого $n$, видимо, впервые у Кели (Cayley) и Сильвестра. Они все же сильно запоздали в том смысле, что при $n = 3$ определитель $D'$ содержится уже у Гаусса (Gauß) в Disquisitiones Arithmetical (1801), где он (№267) назван «forma adjuncta»[1].

Заметим еще для дальнейшего, что при 4 переменных с той же* нашей $f$ мы знаем теперь две инвариантные квадратичные комбинации из $x_i y_k - x_k y_i$. Именно, по-предыдущему

$$P = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} \qquad (13)$$

и теперь

$$\sum k_i k_k \cdot p_{ik}^2. \qquad (13')$$

## § 5. Об эквивалентности квадратичных форм

Конечная цель всякой теории инвариантов видится как решение проблемы эквивалентности, т. е. для произвольных предлагаемых комплексов, а конкретно здесь для пары квадратичных форм, надо иметь ответ на вопрос, можно ли перевести их друг в друга линейным преобразованием исходных переменных вместе с другими, индуцированными

[1] Труды, т.1. стр. 301.

преобразованиями. При этом будет различаться степень эквивалентности: сперва мы отвлекаемся от условия, чтобы определитель преобразования равнялся 1, затем восстанавливаем это условие, потом можно ограничиться вещественными значениями для коэффициентов преобразований или, наконец, как в теории чисел, не просто вещественными, а целочисленными значениями.

Если эквивалентность понимается в наиболее общем смысле, то мы можем сразу точно судить, эквивалентны ли формы, как показано ниже. Для этого приписываем каждой отдельной квадратичной форме признак, который вслед за Фробениусом (Frobenius) называем ее рангом. Ранг равен 1, если в последовательности функций $f$, $f'$, $f''$,… для неопределенных $x, y$ только $f$ отличается от нуля, в то время как $f'$ и все последующие тождественно исчезают (или, в других терминах, обращаются в нуль все миноры второго порядка, которые можно составить из матрицы коэффициентов для $f$, и, как следствие, также все миноры третьего и т. д. порядка). Ранг равен 2, если $f$ и $f'$ отличаются от нуля, тогда как $f''$ и дальнейшие члены последовательности исчезают, и т. д. Если, наконец, определитель $D$ коэффициентов сам $\neq 0$, ранг равен $n$.

При таких предположениях имеет силу теорема:

*Две квадратичные формы тогда и только тогда эквивалентны (в наиболее общем смысле), когда у них один и тот же ранг.*

Что совпадение рангов — необходимое условие эквивалентности, становится тотчас понятным после констатации, что миноры второго, третьего… порядка из $a_{ik}$ при линейных преобразованиях $(x)$ со своей стороны тоже подвергаются каким-то однородным линейным преобразованиям (сами по себе образуют «комплексы»).

Что критерий и достаточен, явствует из восходящего по сути дела[1] к Якоби (Jacobi) приведения заданной квадратичной формы к каноническому виду, который определяется только рангом $r$.

Ради полного охвата всех случаев приводим сперва данную форму вспомогательным преобразованием к такому виду, чтобы в схеме

[1]Ср. посмертное сочинение «Элементарное преобразование выражения, линейного и однородного по отношению к каждой из двух систем переменных», опубликованное в Crelle 7. 53(1857)=Werke, Bd. 3. Впрочем, Якоби обсуждает там только т. н. «общий» случай, когда $r = n$ (или лучше сказать: когда $a_{ik}$ считают неопределенными, свободно меняющимися, величинами). Это связано со всей его манерой изложения, которая — в противоположность образцу, данному Гауссом, — не находила времени для деталей. Такое поведение Якоби долгое время влияло на математиков; даже у Кели и Сильвестра сплошь и рядом исключительные случаи приводятся только мимоходом. Только новая берлинская школа (под влиянием Вейерштрасса и Кронекера) повернулась к точности изложения Гаусса. То и другое обладает, естественно, своими преимуществами; об этом можно было бы долго говорить. То более значимо для нас формальное представление (стремящееся прежде всего к обозримости), то конкретное обдумывание (нацеленное на применение к тому или другому отдельному случаю.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

среди окаймленных миноров (вверху слева) возможно большее их число, именно первые $r$, не обращалось в нуль. Что это возможно, выявляется удобным образом при проективном истолковании $f = 0$. Тогда $a_{11} \neq 0$ означает, что первая координатная вершина выбрана не касающейся $f = 0$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ значит, что связанное с ней первое координатное ребро не касается $f = 0$, и т. д.

В этих предложениях приводим $f$ к виду

$$\begin{aligned} f &= \frac{(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + f_1(x_2 \dots x_n), \\ &= \frac{y_1^2}{a_{11}} + f_1(x_2 \dots x_n), \end{aligned}$$

причем в $f_1$ больше не содержится $x_1$. На первом месте в $f_1$ член

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} x_2^2,$$

равно как и другие коэффициенты оказываются двучленными минорами из $a_{ik}$, деленными на $a_{11}$.

Продолжаем процесс, выделяя из $f_1$ члены с $x_2$. И так далее, пока он сам собой не оборвется на $r$ членах. В этот момент получается $r$-членная сумма:

$$f = \frac{y_1^2}{a_{11}} + \frac{y_2^2}{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} + \frac{y_3^2}{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} + \dots. \tag{14}$$

Здесь нам остается только положить

$$\frac{y_1}{\sqrt{a_{11}}} = z_1, \qquad \frac{y_2}{\sqrt{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}} = z_2, \dots, \tag{14a}$$

чтобы привести $f$ к виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2 \tag{15}$$

с зависимостью, действительно, только от $z$, тогда как $z_1, z_2, \ldots z_r$ будучи линейно независимыми функциями $x_1, x_2, \ldots x_n$, не приносят с собой ничего индивидуального, пока рассматриваются преобразования с произвольным определителем.

Тем самым решена проблема эквивалентности в поставленной нами общей форме. Преобразование Якоби в случае $r = n$ при проективном истолковании есть не что иное, как отнесение конического сечения к полярному треугольнику, поверхности 2-го порядка к полярному тетраэдру, а при аффинном истолковании это — введение системы сопряженных диаметров. Различению же форм $f$ по рангу (в пределах проективной интерпретации с $n = 4$) соответствует различение среди поверхностей 2-го порядка собственно поверхностей, конусов, пар плоскостей и слившихся плоскостей.

Но сам собой напрашивается дальнейший вопрос: в формулах (14) могут появиться мнимости при извлечении квадратного корня. Как обстоит дело с нормальной формой для $f$ и с самой проблемой эквивалентности, если мы ограничимся непременно *вещественными* преобразованиями?

В этом случае мы различаем знаки коэффициентов в (14) и, поставив положительные члены вперед, выписываем сокращенно

$$f = k_1^2 y_1^2 + \ldots k_s^2 y_s^2 - k_{s+1}^2 y_{s+1}^2 - \ldots - k_r^2 y_r^2.$$

Тогда полагаем

$$k_1 y_1 = z_1, \ldots, k_s y_s = z_s,\ k_{s+1} y_{s+1} = t_1, \ldots, k_r y_r = t_{r-s}$$

и имеем уже за счет одних вещественных преобразований

$$f = z_1^2 + \ldots + z_s^2 - t_1^2 - \ldots - t_{r-s}^2.[1] \tag{16}$$

Редукционный процесс, ведущий к подобной вещественной нормальной форме, мог бы осуществляться весьма разнообразными способами (начиная уже со вспомогательного преобразования, при помощи которого мы достигаем $a_{11} \neq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ и т. д.). И вот здесь выступает

[1]Число минусов, очевидно, равно числу перемен знака в последовательности

$$+1,\ a_{11},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{21} \ldots a_{rr} \end{vmatrix}.$$

удивительно простая закономерность, которую Сильвестр указал в 4-м томе Phil. Magazine (1852) под именем *закона инерции квадратичных форм* (Werke III, S. 591). То же нашли в архиве Римана выведенным на основе лекций Гаусса о способе наименьших квадратов, которые Риман, вероятно, слушал в 1846/47. Werke Дополнения (1902), S. 59.

Этот закон гласит:

*Число $s$ положительных квадратов (и, значит, число $r-s$ отрицательных) для данной $f$ всегда одно и то же, какая бы вещественная линейная подстановка ни давала форму (16).*

Доказательство происходит очень просто, но косвенно. Для этого нам снова послужит геометрический способ выражения, но сейчас мы придерживаемся аффинной интерпретации (поскольку используется знак самой $f$).

Допустим, что $f$ каким-нибудь другим редукционным процессом приведена к виду

$$f = \xi_1^2 + \ldots + \xi_\sigma^2 - \tau_1^2 - \ldots - \tau_{r-\sigma}^2.$$

Здесь $\xi_1, \ldots, \xi_\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_{r-\sigma}$ подобно $z_1 \ldots z_s$, $t_1 \ldots t_{r-s}$ в (16), понимаются как линейно независимые комбинации первоначальных $x_1 \ldots x_n$. Это значит, что системой равенств

$$\xi_1 = 0, \ldots, \xi_\sigma = 0,\ \tau_1 = 0, \ldots, \tau_{r-\sigma} = 0$$

задается в $R_n$ линейное многообразие величин $x_1 \ldots x_n$ точно такой же размерности $(n-r)$, как и равенствами

$$z_1 = 0, \ldots, z_s = 0,\ t_1 = 0, \ldots, t_{r-s} = 0.$$

Приравняв теперь оба преобразованных выражения для $f$ друг другу, переносим отрицательные члены в другую часть тождества:

$$z_1^2 + \ldots + z_s^2 + \tau_1^2 + \ldots + z_{r-\sigma}^2 \equiv \xi_1^2 + \ldots + \xi_\sigma^2 + t_1^2 + \ldots t_{r-s}^2.$$

Здесь стоят слева $(r+s-\sigma)$, справа $(r-s+\sigma)$ квадратов. Если бы эти числа не равнялись друг другу, одно, допустим, $(r-s+\sigma)$ было бы меньшим, тогда $s-\sigma > 0$. Системой равенств $\xi_1 = 0, \ldots, \xi_\sigma = 0$, $t_1 = 0, \ldots, t_{r-s} = 0$ задается в $R_n$ некоторое вещественное линейное многообразие $x_1 \ldots x_n$ размерности по меньшей мере $(n-r+s-\sigma)$. Для этого многообразия наше тождество дает нулевую сумму квадратов заведомо вещественных величин $z_1 \ldots z_s$, $\tau_1 \ldots \tau_{r-\sigma}$, которые должны исчезать. Следовательно, $z_1 \ldots z_s$, $t_1 \ldots t_{z-s}$ (отдельно взятые) тоже должны обращаться в нуль на линейном многообразии размерности по меньшей мере

$(n - r + s - \sigma)$, между тем как это возможно только на многообразии размеренности $(n - r)$ для такого набора переменных! Как видно, мы приходим к противоречию, если не принять $s = \sigma$; это и требовалось доказать.

По отношению к вещественным линейным преобразованиям с ненулевым определителем квадратичные формы $n$ переменных, следовательно, разделяются на виды по числу пар $r$, $s$, удовлетворяющих неравенствам

$$1 \leqslant r \leqslant n, \quad 0 \leqslant s \leqslant r.$$

Так при $n = 4$ получаем следующий список $\dfrac{n(n+3)}{2} = 14$ видов или нормальных форм:

| | | |
|---|---|---|
| Ранг $r = 1$: | Нормальная форма | $z_1^2$ или $-t_1^2$, |
| Ранг $r = 2$: | Нормальная форма | $z_1^2+z_2^2$, $z_1^2-t_1^2$, $-t_1^2-t_2^2$, |
| Ранг $r = 3$: | Нормальная форма | $z_1^2+z_2^2+z_3^2$, $z_1^2+z_2^2-t_1^2$, $z_1^2-t_1^2-t_2^2$, $-t_1^2-t_2^2-t_3^2$, |
| Ранг $r = 4$: | Нормальная форма | $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2, \ldots$ вплоть до $-t_1^2-t_2^2-t_3^2-t_4^2$. |

Выделенные еще Гауссом (Disquisitiones Arithmetical №271)[1], формы, представимые в виде

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \qquad \text{или} \qquad - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 - t_4^2,$$

мы называем соответственно *положительно определенными или отрицательно определенными*: для вещественных значений $x_1 \ldots x_4$, не равных одновременно нулю, они могут принимать только положительные или только отрицательные значения. При меньшем ранге, но тоже только плюсах или только минусах в нормальной форме, употребляют термин *полуопределенная* форма: таковая, если не равна нулю, сохраняет определенный знак для вещественных $x_1 \ldots x_4$, но обращение в нуль возможно и для не исчезающих одновременно $x_1 \ldots x_4$. В общем же случае число $s$ положительных квадратов мы можем назвать *инерционным индексом*.

При проективной интерпретации все это подразделение вещественных форм несколько стирается или, лучше сказать, складывается в том смысле, что уравнение $f = 0$ представляет ту же поверхность, что и $-f = 0$. Получаем таблицу:

[1]Труды, т. 1, стр. 305.

Ранг 1. 1 случай: слившиеся плоскости.

Ранг 2. 2 случая: пара мнимых или же вещественных плоскостей.

Ранг 3. 3 случая: мнимый или же вещественный конус.

Ранг 4. 4 случая: мнимая поверхность, вещественная поверхность без вещественных прямых на ней или же вещественная поверхность с вещественными прямыми.

Красота и полезность так устроенной классификации форм и поверхностей проявляются, когда над индивидуальными примерами начинает витать идея непрерывности, подсказывающая рассматривать сами коэффициенты $a_{ik}$ как переменные величины*. Тогда, например, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ оказывается предельным случаем для $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \pm \varepsilon z_4^2$ при $\varepsilon = 0$ и переходным состоянием между обоими видами

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \quad \text{и} \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2.$$

Позже мы еще используем эту идею.

## § 6. Аффинное мероопределение через квадратичную форму

При переносе понятий элементарной метрической геометрии на $R_n$ естественно определить расстояние точки $(x)$ от $O$ как $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, а угол между двумя отрезками $(x), (y)$, исходящими из $O$, как

$$\arccos \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

Так и сделал Грассман во втором издании своего Учения о протяженности (1862) и точно так же в качестве самого собой разумеющегося аналога вращений элементарной геометрии $R_3$ вокруг $O$ рассмотрел те однородные линейные преобразования $x$ с определителем 1, которыми $\sum x_i^2$ переводится в себя[1]. Именно в этом пункте превращается его «линейное» учение о протяженности (только и обсуждавшееся нами до сих пор) в «полное» учение о протяженности. Речь идет при этом о закреплении какой-то одной определенно положительной квадратичной формы (именно $\sum x_i^2$) и о приспособлении теоретико-инвариантных понятий для подстановок, оставляющих эту форму неизменной. В частности,

[1]Вместо «вращения вокруг $O$» Грассман говорит о «круговом изменении».

перпендикулярность двух направлений задается исчезновением поляры: $\sum x_i y_i = 0$. Полярное же сродство (8) принимает следующую простую форму: $u_i = x_i$. Этим создается для геометрического рассмотрения взаимное однозначное соответствие не только системы величин $(x)$ с $(u)$, но и комплекса определителей матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \dots x_n \\ y_1 & y_2 \dots y_n \\ \dots & \dots \dots \dots \end{vmatrix}$$

с таким же комплексом из матрицы

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \dots u_n \\ v_1 & v_2 \dots v_n \\ \dots & \dots \dots \dots \end{vmatrix}.$$

Грассман называет это переходом от какого-либо основного образа к его «дополнению».

Вводить при этом положительно определенную квадратичную форму именно как $\sum x_i^2$ значит просто положить в основу особенно простую («повсюду прямоугольную») систему координат.

От такой отправной точки уже недалеко до обобщения метрической геометрии $R_n$, когда вместо $\sum x_i^2$ кладут в основу произвольную квадратичную форму $\sum a_{ik} x_i \cdot x_k$ с неисчезающим определителем. Ненулевой определитель нужен для того, чтобы полярное сродство (8)

$$u_i = \sum a_{ik} x_k$$

осталось однозначно обратимым (случаи нулевого определителя можно потом интерпретировать как предельные). Развитие такой геометрии дает опять величину угла между двумя исходящими из $O$ лучами

$$\arccos \frac{\sum a_{ik} x_i y_k}{\sqrt{\sum a_{ik} x_i x_k} \cdot \sqrt{\sum a_{ik} y_i y_k}},$$

затем вращения вокруг $O$ определяются через произвольные линейные подстановки с определителем +1, которыми $\sum a_{ik} x_i x_k$ переводится в себя и т. д.

Это было бы общее аффинное мероопределение, при разработке которого надо будет прежде всего решать, с какой комбинацией знаков, в смысле закона инерции, должна соотноситься форма $\sum a_{ik} x_i x_k$ или

$\pm \sum a_{ik} x_i x_k$. Как пример возникающего при этом положения вещей укажем: если $\sum a_{ik} x_i x_k$ оказывается неопределенной формой, то существуют вещественные направления, лежащие в своей полярной плоскости, и наоборот.

С другой точки зрения, при проективной интерпретации в $R_{n-1}$ данный ход рассуждений перекрывается с общим проективным мероопределением по Кели от 1859, которое было подробно обсуждено в четвертой главе т. 1. При этом оказалось (как сам я подробно обосновал в 1871–1872), что сюда включаются оба вида неевклидовой геометрии, которые носят имена Римана и Больяи – Лобачевского, а у нас различаются по признаку употребления квадратичной формы $f$ с определенным или меняющимся знаком.

## § 7. О билинейных формах с когредиентными и контрагредиентными переменными

Билинейными называются формы, линейные и однородные по отношению к каждому из двух наборов переменных. При этом надо различать, будут ли тот и другой когредиентны или контрагредиентны. В первом случае мы обозначаем наборы переменных как $(x)$ и $(y)$, во втором же случае $(x)$ и $(u)$, так что имеем дело с формой

$$\sum a_{ik} y_i x_k \qquad \text{или} \qquad \sum \alpha_{ik} u_i x_k,$$

из которых и исходим.

### $a$) Когредиентные переменные

Различаем здесь два подслучая (с тем обоснованием, что при когредиентных преобразованиях они друг с другом не перепутываются), именно с симметричной ($a_{ik} = a_{ki}$) и антисимметричной ($a_{ik} = -a_{ki}$, $a_{ii} = 0$) матрицей коэффициентов*. В последнем случае мы четкости ради предпочитаем вместо $a_{ik}$ писать $\lambda_{ik}$.

*Симметричная* билинейная форма с когредиентными переменными есть не что иное, как поляра квадратичной формы $\sum a_{ik} x_i x_k$ и по сути дела уже обсуждена вместе с ней.

*Антисимметричные* или *альтернирующие* билинейные формы

$$\sum \lambda_{ik} y_i x_k, \tag{17}$$

напротив, дают нечто новое. Математики встретились с ними впервые лет 100 тому назад в связи с так называемой *проблемой*[1] *Пфаффа* (Pfaff), которую я, несколько отрываясь от исторического контекста, сформулирую здесь как задачу классификации дифференциальных выражений следующего вида:

$$\Xi_1 d\xi_1 + \Xi_2 d\xi_2 + \ldots + \Xi_n d\xi_n$$

(где $\Xi$ – функции от $\xi$). При этом была установлена первенствующая роль выражения

$$\sum\sum\left(\frac{\delta\Xi_i}{\delta\xi_k} - \frac{\delta\Xi_k}{\delta\xi_i}\right) d\xi_i \delta\xi_k$$

(под $d\xi_i$, $\delta\xi_i$ понимаются любые малые вариации переменных). Так пришли (обозначения $d\xi$, $\delta\xi$ параллельны нашим $(x),(y)$) к антисимметричной билинейной форме с когредиентными переменными, вследствие чего инвариант, ключевой для (чисто алгебраического) обсуждения нашей билинейной формы (17) до сих пор называют *агрегатом Пфаффа* (по-английски: *Pfaffian*). Правда, только Якоби и Кели в двух юношеских работах[2] дали четкую разработку алгебраических свойств этого агрегата.

Упомянутые агрегаты Пфаффа существуют только при четных $n$. Это рациональные однородные функции степени $n/2$ от коэффициентов $\lambda_{ik}$ нашей билинейной формы, которые при введении обозначения

$$\Lambda = (1, 2 \ldots n), \qquad \text{начиная с } (i, k) = \lambda_{ik}, \tag{18 a}$$

подчинены рекуррентному закону

$$(1, 2, \ldots, n) = (1, 2)(3, 4, \ldots n) + \\ + (1, 3)(4, \ldots, n,\ 2) + \ldots + (1, n)(2, 3, \ldots, n-1). \tag{18 б}$$

Для $n = 4$ он дает выражение

$$\Lambda = \lambda_{1\,2}\lambda_{3\,4} + \lambda_{1\,3}\lambda_{4\,2} + \lambda_{1\,4}\lambda_{2\,3},$$

знакомое нам еще с §2 как инвариант для формы обсуждаемого типа. Действительно, наша билинейная форма (17) — это вообще сумма

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}(y_i x_k - x_i y_k),$$

---

[1]Труды Берлинской Академии 1814—1815. Пфафф. *Метод полного интегрирования дифференциальных уравнений.*

[2]Якоби, ж. Крелля, т. 2 (1827) = Труды, т. 4, стр. 19. Кэли, ж. Крелля, т. 38 (1849) = Труды, т. 1, стр. 410.

а при $n = 4$ не что иное, как линейная комбинация из $p_{ik}$

$$-\sum \lambda_{ik} p_{ik}$$

и $\lambda_{ik}$ оказываются контрагредиентными к $p_{ik}$, что и дает связь с прежними выкладками.

Значение, которое вообще имеет выражение $\Lambda$ для нашей билинейной формы, проясняется, если мы воспринимаем $\sum \lambda_{ik} y_i$ с $k = 1 \dots n$ как величины, контрагредиентные к $x_k$, и соответственно, как в связи с полярой квадратичной формы, полагаем

$$u_i = \sum \lambda_{ik} x_k. \tag{20}$$

Таким образом задается «дуальное сродство» в так называемой «нулевой системе», именно, с обращением суммы

$$\sum u_i x_i = \sum \lambda_{ik} x_i x_k = \frac{1}{2} \sum (\lambda_{ik} + \lambda_{ki}) x_i x_k$$

тождественно в нуль. Определитель же данного соотношения, согласно ранее сказанному, кососимметричен:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & 0 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{с} \quad \lambda_{ik} = -\lambda_{ki}. \tag{21}$$

Для нечетных $n$ такой определитель всегда равен 0, а для четных, как заметил Кели (цит. выше), квадрату агрегата Пфаффа $\Lambda$ (и в последнем случае использование $\Lambda$ облегчает решение уравнений (20) относительно $x_k$).

К сожалению, я не могу далее вдаваться в эту интересную теорию. Коснемся только истории критерия эквивалентности наших билинейных форм. Согласно важной работе Фробениуса в Crelle 7. 84 (1878) и здесь можно говорить о ранге $r$, который, однако, обязательно четен. Все формы ранга $r$ сводятся к одинаковому нормальному виду

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \dots + (x_{r-1} y_r - x_r y_{r-1})$$

и, следовательно, взаимно эквивалентны[1]. Они характеризуются тем, что в определителе (21) исчезают все миноры порядка выше $r$.

---

[1]Простой метод сведения дал Картан: E. Cartan. *Leçons sur les invariants integraux* (Paris, 1922), p. 53. — *Прим. ред.*

### $b$) Контрагредиентные переменные

Теория билинейных форм с контрагредиентными переменными

$$\sum \alpha_{ik} u_i x_k \tag{22}$$

идет совсем другим путем. Заметим сразу, что на место (20) встают формулы

$$x_i' = \sum \alpha_{ik} x_k, \tag{23}$$

а это просто-напросто формулы линейной подстановки. Кратко мы их можем писать как

$$x' = A(x).$$

Если теперь совершить над $(x'), (x)$ одинаковое — сообразно их когредиентной природе — произвольно выбранное преобразование $S$, то получаем

$$S(x') = AS(x) \qquad \text{или} \qquad x' = S^{-1}AS(x).$$

Этим правилом уже определяется совокупность подстановок, равноправных для нашего анализа, которая порождается какой-нибудь одной из них $A$.

Чтобы выразить инварианты формы (22), нужно привлечь тривиальную фиксированную билинейную форму $ux$. С ее участием образуем семейство форм

$$\sum \alpha_{ik} u_i x_k + \lambda \sum u_k x_k$$

с соответствующим определителем

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \lambda & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \lambda \ldots \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} + \lambda \end{vmatrix}, \tag{24}$$

который в наше время по большей части записывают сокращенно как

$$|\alpha_{ik} + \lambda\delta_{ik}|,$$

принимая установившееся обозначение Кронекера (Kronecker) $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

При разложении по степеням $\lambda$ этот определитель должен давать

$$\lambda^n + \Delta_1\lambda^{n-1} + \Delta_2\lambda^{n-2} + \ldots + \Delta_n.$$

*Тогда* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *оказываются инвариантами* (22), *притом, вообще говоря, достаточными, чтобы характеризовать эту форму* (22) *по отношению к линейным преобразованиям.*

Оговорка «вообще говоря» означает здесь, что в специальных случаях еще нужны дополнения. Место им находится, когда многочлен (25) как функция $\lambda$ содержит кратные линейные множители $(\lambda - \lambda_i)$. При этом допустимо, что тот же делитель $(\lambda - \lambda_i)$ в некоторой степени сохранится в определителе после вычеркивания любых строки и столбца, может быть, и после двукратного вычеркивания и т. д. Наоборот, наличие общего множителя у всех миноров одного какого-либо порядка достаточно для его присутствия в (25). Вся совокупность возможностей, представляющихся при характеризации различных задаваемых билинейных форм по отношению к преобразованиям, освещается так называемой теорией *элементарных делителей*, которая была намечена Сильвестром[1] в 1851, усовершенствована Вейерштрассом[2] (Weierstraß) в 1868 и приведена в завершенный вид Фробениусом в 1879 (так что больше нет надобности[3] следить за отдельными линейными множителями в (25)). Детали в учебниках, например у Бохера[4]. Это очень важная теория, поскольку она дает окончательное решение самым различным вопросам Анализа.

Чаще всего рассматривать определитель (24) и приравнивать его нулю приходится при сопоставлении пары квадратичных форм

$$\sum \alpha_{ik} x_i x_k \qquad \text{и} \qquad \sum x_i^2.$$

Это происходит, например, в геометрии, когда ищут главные оси конического сечения или поверхности второго порядка, или в небесной механике при расчете вековых возмущений, которые орбиты различных планет оказывают друг на друга. Эта астрономическая постановка вопроса даже исторически послужила источником всей теории[5]; она вос-

[1]Phil. Magazine (4), 1 = Werke Bd. 1, S. 219ff.

[2]Berliner Monatsberichte 1868 = Werke Bd. 2, S. 19ff.

[3]Crelle 7.86 (Теория линейных форм с целочисленными коэффициентами).

[4]Ясное представление ведущих идей можно найти в книге Ф. Клейн (F. Klein) *Vorlesungen über höhere Geometrie* (Berlin 1926), S. 379ff. — *Прим. ред.*

[5]Ср., например, Tissérand. Traité de Mécanique céleste Bd. 1. Kapp. 26, 27. Вековое уравнение, если ограничиться 8 планетами, представляет собой численно заданное уравнение 8-й степени. Если не включать Нептун, остается уравнение 7-й степени, практическим решением которого занимался еще Якоби (Crelle J. 30, 1845 = Werke Bd. 7, S. 97ff). Прискорбное следствие все большего расширения нашей науки состоит в том, что многие более молодые математики о подобных вещах знают только понаслышке или вовсе ничего не знают. (Хотя упрек Клейна во многом справедлив, все же в XX веке ряд математиков успешно занимались проблемами небесной механики. В нашей стране, в частности, А. Н. Колмогоров, В. И. Арнольд, В. М. Алексеев, Н. Н. Нехорошев и др. — *Прим. перев.*)

ходит к Лагранжу (Lagrange) и Лапласу (Laplace); из-за этого называют соответствующее уравнение даже в чисто математических исследованиях по большей части *вековым уравнением*. — Связь этих последних рассуждений с нашей общей постановкой состоит в том, что от квадратичной формы $\sum \alpha_{ik} x_i x_k$ или ее поляры $\sum \alpha_{ik} x_i y_k$ мы приходим как раз к той билинейной форме $\sum \alpha_{ik} u_i y_k$, с которой у нас здесь начинался анализ. При этом только появляется не вводившаяся пока специализация $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$. С ней действует теорема, что при вещественных $\alpha_{ik}$ корни характеристического уравнения все вещественны, а элементарные делители — простые.

К сожалению, невозможно прослеживать еще дальше интересные вопросы, затронутые здесь$^\star$.

# B. Более свободный очерк теории линейных инвариантов, включая векторный анализ[1]

## § 1. Об Эрлангенской программе

Разумеется, изложенное в разделе **A** дает еще только очень неполное представление о содержании и особенно о методах общей теории линейных инвариантов. В отношении содержания мы ограничились самым необходимым, в расчете на последующее обсуждение этих вещей. В методическом же плане дело необходимо сводилось к воспроизведению отдельных выхваченных примеров. Не было возможности детально развить ни способы проверки той или иной представленной функции на инвариантность, ни основные положения — что можно при помощи подходящей символики выписать вообще все инварианты не выше заданной степени относительно компонентов комплекса — и что есть методы для выявления всех тождественных соотношений между этими инвариантами, так что в каждом отдельном случае можно выделить наименьшую систему инвариантов, через которые все остальные выражаются как целые рациональные формы.

Тем самым мы уже подсказываем, что речь идет о широко развитой завершенной дисциплине, которая превосходит в этом смысле многие математические проблемы своей мощью и которую никакой математик не должен оставлять вне поля своей эрудиции. Между тем для достижения полной значимости теории возникает потребность расширить первоначальную основу, как я это кратко обрисовал сперва в июне 1872 в своей

[1]Текст Клейна в этом разделе частично изменен и сокращен редактором. Ср. примечание 10 в конце главы. — *Прим. ред.*

второй статье о неевклидовой геометрии, а затем в октябре 1872 представил в Эрлагенской вступительной лекции, или программе[1]. Развитые там идеи не только остались основой для моих собственных позднейших работ; но в особенности Софус Ли, с которым я тогда вместе работал, воспринял и распространил в кругу своих учеников эти идеи, так что они постепенно стали общим достоянием обширных математических кругов. Последнее сто́ит подчеркнуть потому, что многие построения физиков, включая те, которые мне предстоит обсудить далее, в действительности могут рассматриваться как конкретные реализации по отношению к сформулированной еще тогда общей постановке вопроса.

Принцип можно выразить кратко. В **A** мы начинали с того, что подвергали первичные переменные произвольному однородному линейному преобразованию с определителем 1. Напрашивающееся обобщение состоит в том, чтобы принимать к рассмотрению такую совокупность преобразований, которая соответствовала бы понятию группы. Возникающая постановка задачи на с. 7 программы так была облечена мною в словесную форму:

«Существует многообразие, и дана группа преобразований на нем; требуется исследовать построения на этом многообразии на предмет таких свойств, которые не меняются преобразованиями группы.»

Несколькими строками ниже мысль выражена иначе:

«Следует развить теорию инвариантов применительно к данной группе.»

Когда выражаются немного другими словами:

«теорию соотношений, инвариантных по отношению к группе», то остается только один шаг до слов теории относительности, которыми современные физики пользуются для попадающих в их область случаев более общего задания цели.

Эрлангенская программа принадлежит к тем сочинениям, которые снова и снова дают побудительные толчки, наводя порядок в достигнутом. Я всегда очень приветствовал, когда этим открывается новое поле исследований. Наряду с развитием учения о разрывных группах, важнейший прогресс здесь связан с общей теорией непрерывных групп, которую создал Ли, начиная с 1872; следует упомянуть и обстоятельное обсуждение свойств отдельных линейных групп различными более молодыми математиками. В 1892–93 годах в своем литографированном

[1] Verleichende Betrachtung über nene geometrische Forschungen /Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований/, Эрланген, изд. дек. 1872, следовательно, до упомянутой статьи, которая из-за большой сидячей забастовки вышла только в 1873 в Math. Ann. Bd. 6. В Math. Ann. Эрлангенская программа появилась позже — Bd. 43 (1893), Klein Соч. Bd. 1, S. 460, потом еще неоднократно перепечатывалась и переводилась.

«Введении в высшую геометрию»[1] я постарался, в рамках годичного курса лекций, дать обзор тогдашнего состояния предмета. Кое-что дальнейшее можно найти в 3-м томе Math. Enzyklopädie (III AB, 4b) в статье Фано (Fano) «Непрерывные геометрические группы. Теория групп как принцип подразделения геометрии». 1907.

Несмотря ни на что я верю, что Эрлангенская программа подводит некую глубокую черту в развитии геометрии или, если пользоваться обобщенным выражением Грассмана, учения о протяженности. На место убогому воззрению, в котором я вырос: именно, что только проективное рассмотрение геометрических вопросов, собственно говоря, можно считать научными, в определенный момент пришла более либеральная доктрина, ставящая на место проективной геометрии идею многократно ступенчатой геометрии преобразований. Ничего удивительного, что эта программа при столкновении с более ранним воззрением встретила сперва многочисленные возражения. Очень хотелось бы мне знать, как поставил бы себя мой дорогой учитель Клебш (Clebsch). Однако здесь вмешалась причуда судьбы, и Клебш, когда моя программа как раз была в печати, всего лишь 39 лет от роду вдруг скончался от приступа дифтерии (в ноябре 1872). Тогда это обстоятельство создало новые затруднения на пути моей научной работы в разных направлениях, о чем я, может быть, найду случай обстоятельно рассказать в другом месте.

## § 2. Специальное обращение к трехмерному пространству. Переход к однородной ортогональной группе

Из различных возможностей, которые Эрлангенская программа предоставляет для геометрии $R_3$, мы хотим здесь назвать отдельно только простейшие типы групп линейных подстановок. Я просто придерживаюсь формул т. I, в начале раздела III четвертой главы. Подразумевая обычным образом под $x$, $y$, $z$ прямоугольные координаты, я тогда выписал последовательно:

1. Группа «проективной» геометрии:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}, \\ y' &= \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}, \\ z' &= \frac{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}. \end{aligned} \tag{1}$$

[1]Позже издано книгой: F. Klein. Vorlesunden über höhere Geometrie. Berlin 1926. — *Прим. ред.*

2. Группа аффинной геометрии:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta', \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Группа метрической геометрии:
те же формулы, как (2), но при условии, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \tag{3}$$

изображал «ортогональную» подстановку, т. е. переводящую выражение $x^2 + y^2 + z^2$ само в себя.

Чтобы у нас были сплошь однородные линейные подстановки, можно, конечно, использовать искусственный прием, который впервые провел Плюкер и который мы находим теперь во всех учебниках, именно, заменять $x$, $y$, $z$ на $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$, после чего брать раздельно числители и знаменатели. Но здесь мы, ограничиваясь случаями (2), (3), примем более простое (совсем тривиальное) средство в виде отбрасывания аддитивных постоянных, входящих в формулы подстановки. Тогда вместо (2) мы имеем аффинные преобразования с фиксированным началом координат

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{aligned} \tag{2$'$}$$

и точно так же вместо (3) ортогональные преобразования с закрепленным началом координат, задаваемые посредством (2′) с дополнительной формулой

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{3$'$}$$

Уточнив таким образом формулы (2), (3), далее мы отвлекаемся от общего рассмотрения аффинной геометрии (или обращающейся к ней статики и кинематики твердых тел). В то время как в случае (2) мы просто примыкаем к уже обсужденной общей теории линейных инвариантов для трех переменных[1], в случае (3), напротив, приходим к чему-то

[1]Причем нет надобности определитель из коэффициентов подстановки приравнивать 1, как мы простоты ради предполагали выше, стр. 45.

иному, называемому далее ортогональной теорией линейных инвариантов (для трех переменных).

Сначала разбираемся, что́ собой представляют однородные линейные подстановки $n$ переменных. Сперва напишем таковые хотя бы в виде (как в **A** § 1)

$$x_i = s_{i1}x'_1 + \ldots + s_{in}x'_n \quad \text{с} \quad \sum x_i^2 = \sum x'^2_i. \tag{4}$$

Утверждения хорошо известной теории, восходящей по существу к Эйлеру и Лагранжу, начинаются с того, что $n^2$ коэффициентов $s_{ik}$ связаны $\dfrac{n(n+1)}{2}$ уравнениями:

$$\sum_i s_{ik}^2 = 1, \quad \sum_i s_{ik}s_{il} = 0, \quad (k \neq l)\,(k = 1, \ldots, n),\ (l = 2, \ldots, n) \tag{5}$$

и что соответственно группа однородных ортогональных подстановок (4) содержит $\dfrac{n(n-1)}{2}$ параметров — далее что обращение (4) выглядит как

$$x'_k = s_{1k}x_1 + \ldots + s_{nk}x_n, \tag{6}$$

так что вместо (5) можно с тем же правом исходить из

$$\sum_k s_{ik}^2 = 1, \quad \sum_k s_{ik}s_{jk} = 0,\ (i \neq j)\,(i = 1, \ldots, n),\ (j = 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Далее в особенности надо рассмотреть определитель подстановки

$$r = |s_{ik}|. \tag{8}$$

Умножив его сам на себя по следующей матричной схеме:

$$\begin{vmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} s_{11} & \ldots & s_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{1n} & \ldots & s_{nn} \end{vmatrix},$$

находим $r^2 = 1$. Сверх этого из уравнений (5) или (6) ничего не следует. Итак, может представиться как $r = +1$, так и $r = -1$, в соответствии с чем различают *собственные* и *несобственные* ортогональные подстановки. Так как при комбинировании двух линейных подстановок их определители перемножаются, собственные подстановки, взятые сами по себе, уже образуют группу. Это есть *непрерывная* $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$.[1]

Собственные и несобственные подстановки вместе, напротив, дают группу из числа так называемых *смешанных* (с тем же самым числом параметров). Действительно, среди несобственных подстановок нет так называемых бесконечно малых («бесконечно малое» преобразование — не «тождественное»). Простейший пример несобственного преобразования получаем, изменив знак только у одной из переменных $x_1, \dots x_n$. Геометрически собственные преобразования означают «вращения» вокруг $O$, несобственные дают нечто иное, «перекладку другой стороной» по выражению Штади (Study) (Math. Ann. 39).

Встает фундаментальный для дальнейшего вопрос, принимаем мы при построении соответствующей теории инвариантов во внимание только собственные ортогональные подстановки или также несобственные. Первое удобнее (как ведь и мы при первом освещении общей теории линейных инвариантов все время ради краткости полагали $r = 1$). Второе, однако, открывает нам определенные более тонкие подразделения, оказывающиеся существенными при более точной работе в современной физике, таково, например, подразделение векторов первого и второго рода; мы этим пока ограничимся, сославшись на них при случае.

## § 3. Привлечение кватернионов

Исчисление кватернионов Гамильтона (Hamilton) уже было близко затронуто в четвертой главе т. 1. Однако, чтобы иметь в дальнейшем возможность опираться на это, приведем также простые способы кватернионного представления ортогональных подстановок с определителем +1 для трех и четырех переменных.

Напоминаю кратко: кватернионы — это четырехчленные комплексные числа

$$q = d + ia + jb + kc,$$

для которых имеет силу таблица умножения:

$$\left.\begin{matrix} jk = i, & ki = j, & ij = k \\ kj = -i, & ik = -j, & ji = -k \end{matrix}\right| \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Уравнение

$$t' + ix' + jy' + kz' = q(t + ix + jy + kz),$$

[1] $G_k$ означает в дальнейшем какую-либо группу с $k$ параметрами.

соответственно, равнозначно линейной подстановке

$$\begin{aligned} t' &= dt - ax - by - cz \\ x' &= at + dx - cy + bz \\ y' &= bt + cx + dy - az \\ z' &= ct - bx + ay + dz, \end{aligned} \tag{A}$$

которая стоит уже очень близко к ортогональной подстановке с определителем +1, потому что, во-первых, расчет показывает:

$$t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)(d^2 + a^2 + b^2 + c^2),$$

во-вторых, определитель получает значение $(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Отсюда еще только один шаг до примечательной формулы общего представления собственных ортогональных подстановок 4 переменных, которую дал Кели в журнале Крелля, Bd. 50. Соч. II, S. 192, 202:

$$t' + ix' + jy' + kz' = \frac{q(t + ix + jy + kz)q'}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)}}, \tag{37}$$

причем под $q' = d' + ia' + jb' + kc'$ понимается какой-нибудь второй кватернион. Но при этом мы одновременно приходим к общему представлению собственных ортогональных подстановок 3 переменных, беря частное значение $q$ в виде $d - ia - jb - kc$. В ходе расчетов, действительно, кроме отдельного $t' = t$, получается формула для вращений вокруг начала координат:

$$ix' + jy' + kz' = q(ix + jy + kz)q^{-1}, \tag{38}$$

которую Гамильтон и Кели вывели еще в 1844 году.

Что эти формулы (37), (38) содержат правильное число 6 или соответственно 3 независимых параметра, проверяется простым подсчетом. Целесообразно еще свести формулу (37) к умножению матриц второго порядка (предварительное объяснение было в конце четвертой главы т. 1).

Обозначаем временно — во избежание путаницы с $i$ теорией кватернионов — обычное $\sqrt{-1}$ через $\varepsilon$. Вводим

$$d + \varepsilon a = \alpha, \quad b + \varepsilon c = \beta, \quad -b + \varepsilon c = \gamma, \quad d - \varepsilon a = \delta$$

и аналогично

$$t + \varepsilon x = \xi, \quad y + \varepsilon z = \eta, \quad -y + \varepsilon z = \zeta, \quad t - \varepsilon x = \tau \quad (t' + \varepsilon x' = \xi' \text{ и т. д.}).$$

Тогда формулы подстановки ($A$) можно записать следующим образом, используя умножение матриц:

$$\begin{pmatrix} \xi' & \eta' \\ \zeta' & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\xi + \beta\zeta & \alpha\eta + \beta\tau \\ \gamma\xi + \delta\zeta & \gamma\eta + \delta\tau \end{pmatrix},$$

строки первой матрицы скомбинированы со столбцами второй. Что при этом определитель

$$\begin{matrix} \xi' & \eta' \\ \zeta' & \tau' \end{matrix}$$

оказывается равным произведению определителей

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau, \end{matrix}$$

это непосредственное следствие правила умножения определителей. Совершенно так же получаем

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'\xi + \gamma'\eta & \beta'\xi + \delta'\eta \\ \alpha'\zeta + \gamma'\tau & \beta'\zeta + \delta'\tau \end{pmatrix}.$$

Теперь уже в матрице

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix}$$

комбинируются между собой элементы, принадлежащие одной и той же строке. В итоге, согласно формуле (7), эта матрица превращается в

$$\begin{pmatrix} \xi' \, \eta' \\ \zeta' \, \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \, \beta \\ \gamma \, \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \, \eta \\ \zeta \, \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' \, \beta' \\ \gamma' \, \delta' \end{pmatrix} : \sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')}, \qquad (37')$$

чем одновременно иллюстрируется наиболее общий способ такой линейной замены в $\left(\begin{smallmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{smallmatrix}\right)$, при которой величина определителя сохраняется с точностью до некоторого определенного множителя, это достигается, с одной стороны, линейным перекомбинированием элементов матрицы по столбцам, с другой стороны, по строкам. Тем самым умножение кватернионов и вместе с ним ортогональные подстановки с определителем +1 ставятся в соответствие с бинарными линейными подстановками (причем $\alpha$ и $\delta$, а также $\beta$ и $-\gamma$ надо считать комплексно сопряженными величинами, если мы хотим представить обычные вещественные вращения).

С учетом указанного ограничения, теория инвариантов вещественных ортогональных преобразований 3 и 4 переменных можно основывать на общей теории бинарных инвариантов. Эту идею систематически провел Уолш (Wälsch) в своем «бинарном анализе» сначала для $n = 3$. Сошлюсь на свои резюмирующие статьи в т. 143 и 144 Comptes Rendus (1906, II; 1907, I). Эти исследования во многом параллельные материалу книги Схоутена (Schouten) 1914 г., упоминаемой далее[1], достаточно плодотворны в своей области — именно из-за привлечения развитых в общей теории инвариантов вспомогательных средств — и далеко продвинуты. Но боюсь, что мало найдется охотников все это осваивать, потому что предполагаются, во-первых, разнообразные предварительные знания, во-вторых, из-за особой стенографической манеры записи формул в целях краткости. Можно было бы распространить исследования и на несобственные ортогональные подстановки, если добавить к бинарным преобразованиям перестановки $\varepsilon$ и $-\varepsilon$. Недавно Уолш занялся и случаем $n = 4$, при этом, однако, близко придерживаясь исчисления кватернионов.

Удовлетворимся здесь этими краткими замечаниями. Геометрическое (проективное) истолкование алгебраического результата (37), которое оперирует преобразованиями друг в друга прямолинейных образующих обоих семейств поверхности 2-го порядка $\xi\tau - \eta\zeta = 0$, я подробно дал в Bd. 37 Mathem. Annalen (1890).

Во всяком случае видно, насколько точно приспособлены кватернионы к изображению ортогональных подстановок 3 или 4 переменных. Они могут применяться с пользой всюду, где заходит речь о таких подстановках. Напротив, вряд ли кто-нибудь сейчас видит в них универсальное целебное средство от всех недостатков геометрии, как порой казалось Гамильтону и его ученикам.

## § 4. Переход к основным понятиям векторной и тензорной алгебры*

Сейчас наша задача состоит не в систематическом развитии теории инвариантов однородных ортогональных подстановок, а только в объяснении, как от соответствующих первичных понятий при $n = 3$ и $n = 4$ непосредственно перейти к аппарату векторной алгебры, привычному для физиков[2].

1. $n = 3$.

---

[1] См. стр. 61.

[2] Особенная трудность кроется при этом в различии терминологии и языка формул у отдельных авторов. Оставляя различные нововведения, я обращаюсь к таким терминам,

Набор трех переменных

$$x,\ y,\ z,. \tag{9}$$

сообразуясь с тем, что в основу пока мы клали группу однородных аффинных преобразований, связываем с «отрезком», исходящим из $O$. Когда же мы сужаем ее до группы однородных ортогональных преобразований, сформулированное понятие сливается с тем, что́ физики вслед за Гамильтоном называют *вектором* (исходящим из $O$). При том же ограничении ортогональными подстановками

$$x^2 + y^2 + z^2 \tag{10}$$

есть простейший пример отвечающего им инварианта (числовой величины); физики в таких случаях говорят, снова примыкая к Гамильтону, о *скаляре*. Но инвариантом оказывается и поляра выражения (10), т. е.

$$x'x + y'y + z'z, \tag{11}$$

если $(x,\ y,\ z)$, как и $(x',\ y',\ z')$ — векторы. Ее наименования, принятые у физиков, *внутреннее* или *скалярное произведение* обоих векторов, происходят от того, что как Грассман, так и Гамильтон связывали свои теории прежде всего с учением о многочисленных комплексных числах, которое мы здесь оставили в стороне; смотри опять четвертую главу т. 1.

Важно, что $x'$, $y'$, $z'$, по определению когредиентные к $x$, $y$, $z$, в силу инвариантности (11) оказываются и контрагредиентными к ним. *Всякий раз, когда заходит речь об однородных ортогональных преобразованиях комплекса величин, различие когредиентности и контрагредиентности упраздняется.*

Рассмотрим теперь грассмановы ступени, строящиеся из разных векторов, и начнем с определителя

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Смотря по тому, используем мы ортогональные подстановки с определителем +1 или −1, он полностью сохраняет свое значение или только меняет знак; физики, когда хотят подчеркнуть именно последнее обстоятельство, говорят о скаляре второго рода, или псевдоскаляре. Разложив далее (12) по элементам первой горизонтали:

$$x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x''),$$

которые к данному моменту, по-видимому, общепонятны для физиков, по-крайней мере немецких.

сразу видим, что величины второй ступени

$$y'z'' - z'y'', \quad z'x'' - x'z'', \quad x'y'' - y'x'', \tag{13}$$

контрагредиентные к $x$, $y$, $z$, сами также показывают векторную природу по отношению к собственным ортогональным подстановкам, а при несобственных не меняют общего знака. Физики говорят о *внешнем* или *векторном произведении* двух векторов $x'$, $y'$, $z'$ и $x''$, $y''$, $z''$ и называют объединение трех компонентов такого произведения вектором второго рода или «аксиальным» вектором в отличие от первоначально заданного «полярного» (9).

Перейдем к квадратичным формам, составленным из компонентов вектора

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy. \tag{14}$$

Систему коэффициентов

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \tag{15}$$

в силу того, что они играют важную роль при деформации непрерывной среды, называют по предложению Фойгта (Voigt) *тензором*. По отношению к аффинным преобразованиям тензоры вообще подразделяют по их рангу, а в рамках вещественной алгебры еще по инерционному индексу, смотри **А** § 5. Вернемся к ортогональным подстановкам, тогда специфическая квадратичная форма $x^2 + y^2 + z^2$ в сочетании с (14) дает повод составить «характеристический определитель»

$$\begin{vmatrix} a+\lambda & f & e \\ f & b+\lambda & d \\ e & d & c+\lambda \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Разложив его по степеням $\lambda$:

$$\lambda^3 + (a+b+c)\lambda^2 + (bc+ca+ab-d^2-e^2-f^2)\lambda + \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix}, \tag{16'}$$

получаем мы в лице трех появляющихся коэффициентов при $\lambda^2$, $\lambda^1$, $\lambda^0$ три основных ортогональных инварианта тензора. Их комбинацией является, в частности, инвариант

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 - 2(bc+ca+ab-d^2-e^2-f^2) &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2 + 2e^2 + 2f^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Превратив выражение (17) в поляру двух тензоров $a, b, c, \ldots$ и $a', b', c', \ldots$

$$aa' + bb' + cc' + 2dd' + 2ee' + 2ff', \tag{18}$$

убеждаемся, что величины

$$a,\ b,\ c,\ \sqrt{2}\cdot d, \sqrt{2}\cdot e, \sqrt{2}\cdot f$$

контрагредиентны сами себе. В соответствии с (14) они, однако, контрагредиентны также к

$$x^2,\ y^2,\ z^2,\ \sqrt{2}\cdot yz,\ \sqrt{2}\cdot zx,\ \sqrt{2}\cdot xy, \tag{18$'$}$$

следовательно, предыдущие величины когредиентны этим комбинациям из $x$, $y$, $z$. Можно было бы рекомендовать — впрочем, в духе общей теории инвариантов — систематический ввод величин (18$'$) как компонентов тензоров.

Вместе с квадратичными формами (14) как их поляры одновременно входят в рассмотрение симметричные билинейные формы (где мы больше не различаем когредиентные и контрагредиентные переменные). Антисимметричная же билинейная форма записывается в виде:

$$A(yz' - y'z) + B(zx' - z'x) + C(xy' - x'y). \tag{19}$$

Совокупность коэффициентов $A$, $B$, $C$ ведет себя, следовательно, как вектор второго рода. Общая билинейная форма (в которой не разделены симметричная и антисимметричная часть) представляется у нас как эквивалент однородного аффинного преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{aligned} \tag{20}$$

Немецкие геометры называют поэтому систему $(\alpha, \ldots, \gamma'')$ сейчас *аффинором*, у Гамильтона такое преобразование выступает под именем «линейной векторной функции» (компоненты одного вектора являются линейными функциями компонентов другого). Сюда относится и то, что Гиббс (Gibbs) называет «диадами»; ср. стр. 55.

2. $n = 4$ (вкратце). Переменные пусть называются $x_1, x_2, x_3, x_4$. Также, следуя Зоммерфельду (Sommerfeld), Ann. d. Phys. [4], Bd. 32, 1910, пусть при $n = 4$ сохраняются обычные для $n = 3$ названия скаляр, вектор, тензор с дополнительным различительным указанием числа компонентов.

Набор значений $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ (как объект произвольных однородных ортогональных преобразований) я соответственно называю 4-вектором; из него выводится простейший скаляр

$$\sum x_i^2.$$

Система коэффициентов квадратичной формы $\sum a_{ik}x_ix_k$ (или сходной симметричной билинейной формы) теперь должна называться 10-тензором. У 10-тензора есть четыре основные инварианта (скаляры), которые получают, разлагая определитель $|a_{ik}+\lambda\delta_{ik}|$ — с обозначением Кронекера — по степеням $\lambda$.

Система коэффициентов антисимметричной билинейной формы $\sum \lambda_{ik}(x_iy_k - y_ix_k)$ должна называться 6-тензором; существуют два принадлежащих ей простейших скаляра: $\sum \lambda_{ik}^2$ и

$$\Lambda = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{42} + \lambda_{14}\lambda_{23}.^*$$

## § 5. Развитие векторного (тензорного) анализа*

Вернемся пока опять к $n=3$. К нашим предыдущим построениям надлежит присоединить новое понятие чрезвычайной важности, *понятие поля*.

До сих пор скаляры, векторы, тензоры..., которые мы рассматривали, относились к началу координат (поскольку речь шла об однородных ортогональных подстановках $x$, $y$, $z$); теперь же мы начинаем приписывать каждой точке пространства $x_0$, $y_0$, $z_0$ скаляр или вектор, или тензор..., и отсюда рождается понятие *скалярного, векторного, тензорного... поля*. Компоненты «комплекса», привязанного таким образом к точке $x_0$, $y_0$, $z_0$, должны вести себя как компоненты скаляра, вектора... при однородных ортогональных преобразованиях

$$x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0.$$

Понятие поля представляется само собой разумеющимся с тех пор, как существует математическая физика. Раньше всего оно, видимо, определилось как скалярное поле в теории тепла, когда температуру стали считать функцией положения. Потом надо естественным образом заметить, что поля разнообразного вида вводились по мере развития классической механики (потенциальные поля, силовые поля...). Дальнейшие примеры в изобилии доставила механика непрерывных сред. Но только в современном учении об электромагнетизме (которое рассматривает пространственную среду как носителя электромагнитных явлений) это понятие получило чеканное выражение: слово «поле», насколько я знаю, находят в обширных работах В. Томсона (W. Thomson) по магнетизму (1851 в Philosophical Magazine=Reprint of papers or electricity and magnetism, p. 473). С другой стороны, можно усмотреть понятие поля в обобщенной форме в абстрактной теории инвариантов там, где изучаемые комплексы представлялись зависящими от каких-нибудь параметров.

Я намереваюсь использовать выражение «векторная алгебра» широким образом как охватывающее учения о скалярах, тензорах и т. д. Так определенную «векторную алгебру» понятие поля превращает в «векторный анализ», когда в состав операций, которым подвергаются компоненты рассматриваемого комплекса, включается дифференцирование или интегрирование по параметрам $x_0$, $y_0$, $z_0$. Абстрактный математик сказал бы, что наряду с алгебраическими инвариантами строятся *дифференциальные инварианты, интегральные инварианты*. Впрочем, я предпочитаю вместо $x_0$, $y_0$, $z_0$ писать просто $x$, $y$, $z$, а координаты самого вектора, прикрепленного к точке $x$, $y$, $z$, обозначать через $u$, $v$, $w$. Я буду также (как это имеет место всегда у Гамильтона и по большей части также у Максвелла) отказываться от различения скаляров, векторов и т. д. первого и второго рода, ограничиваясь, следовательно, теорией инвариантов собственных ортогональных подстановок.

Проще всего, вероятно, можно подойти к новым образам, усмотрев, что для любой функции точки $f(x, y, z)$ оба выражения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{21}$$

не зависят от системы координат и тем самым позволяют построить из первичного скалярного поля два новых. Французский математик Ламе (Lamé, 1795–1870), исследовавший в принципе это построение (ср. его Leçons sur les cordonnées curvilignes, Paris 1859) назвал оба выражения именно из-за их инвариантности *дифференциальными параметрами* соответственно первого и второго порядка (l.c.p. 6). Однако он был еще далек от векторного образа мыслей. Последний проявляется в близкой нам форме у Гамильтона (ср. его Lectures on quaternions, 1853, как и четвертую главу нашего т. 1). Воспитанный в символической методике английских аналитиков, он рассматривает как вектор не только

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \tag{22}$$

(т. е. «градиент», по Максвеллу), но и прямо сам символ

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}. \tag{23}$$

Тогда действительно, очевидно, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \tag{24}$$

и точно так же

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{25}$$

суть скаляры, точнее, операции, применение которых к другому скаляру (умножение на него, как говорит сам Гамильтон) снова дают скаляр. Желательно также заметить, что 6 производных второго порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} \tag{26}$$

представляют собой тензор, а (25) есть не что иное, как линейный инвариант, как у всякого тензора.

Легко проверить, как работает представленная здесь чисто формальная точка зрения (противостоящая наглядной, с которой обычно начинают учебники):

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ означают вектор, потому что они ведут себя при ортогональных заменах $dx$, $dy$, $dz$, как компоненты вектора или, с другой стороны,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

вместе с самой $f$ является скаляром. Что Гамильтон при таких рассуждениях использовал свое исчисление кватернионов, а компоненты (23) объединял в единый символ

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},^{1} \tag{27}$$

можно здесь и не принимать во внимание.

Заметим в этой связи, что уже Максвелл в своем Treatise on Electricity and Magnetism (1873) обошелся без нашего формализма кватернионов, а в основном через этот трактат векторные представления

[1]«Набла» кватернионистов, называемый так ими по сходству значка $\nabla$ с древнееврейским музыкальным инструментом, носящим это имя.

распространились среди физиков. В число главных понятий, вводимых для векторного поля

$$u,\ v,\ w,$$

входит скалярное поле величин

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{28}$$

и, с другой стороны, векторное поле[1]

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{29}$$

Интересно проследить, как постепенно завоевывали себе место определенные наименования понятий, стоящих за (28), (29). Под влиянием гидродинамических образов Максвелл называет выражение, противоположное (28) по знаку, конвергенцией, а господствующий теперь термин *дивергенция* [для самой величины (28)] возник только потом из мимоходом брошенного предложения Клиффорда (Clifford) на с. 209–210 его книги «Kinematic» (1878). Вектор (29) Максвелл сначала назвал rotation (хотя это *удвоенная* мера вращения частицы жидкости); в трактате же он применяет термин «curl», который широко проник и в немецкую учебную литературу, временами передаваясь на немецкий лад как «Quirl». В позднейшее время снова возвращаются к «rot», т. е. к сокращению от «rotor» по Клиффорду.

Наименования *соленоидальные* и *ламеллярные* для тех особенных векторных полей, у которых соответственно выражения (28) или (29) тождественно обращаются в нуль, встречается уже у Томсона, цит. выше, другие авторы, представляя себе гидродинамическую картину, говорят о полях, *свободных* от *источников* или *вихрей*. Идя дальше, обнаруживаем сначала, что выражение (28) инвариантно по отношению к ортогональным, но не произвольным аффинным преобразованиям[2], компоненты же (29), напротив, ведут себя как вектор при любых преобразованиях с определителем +1 (поскольку соответствуют двучленным определителям Грассмана). Вслед за этим заключаем, что

$$u\Big(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+v\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\Big)+w\Big(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \tag{30}$$

---

[1] То и другое очевидно из наших прежних построений, если только считать, что сами $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ образуют вектор, умножаемый на $u$, $v$, $w$ скалярно или векторно.

[2] Подразумевается контрагредиентность $u$, $v$, $w$ к $x$, $y$, $z$.

представляет собой аффинный инвариант. Конечно, не случайно (29), (30) как раз и появляются в Анализе, когда речь заходит о классификации дифференциальных выражений (форм Пфаффа)[1]:

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz \tag{31}$$

по их поведению по отношению к произвольным точечным преобразованиям:

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \psi(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \chi(\xi, \eta, \zeta).$$

Действительно, такими преобразованиями индуцируются аффинные подстановки дифференциалов $dx$, $dy$, $dz$, входящих в скалярное выражение (31). Однако одно из самых замечательных достижений Грассмана состоит в том, что он в своем Учении о протяженности 1862 перенес этот аппарат на произвольные $n$, т. е. классифицировал любые $n$-членные формы Паффа по их поведению по отношению к произвольным точечным преобразованиям. Можно сказать, что он одновременно поставил на твердую основу исследование $n$-мерных векторных полей с их аффинными свойствами.

Чтобы дать пример интегрального инварианта, дадим развернутое представление произвольного векторного поля $u$, $v$, $w$ суперпозицией ламинарного и соленоидального полей, что по сути дела было указано еще в 1850 Стоксом (Stokes)[2]. Итак, полагаем

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned} \tag{32}$$

но дополнительно ставим условие

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \tag{32'}$$

[1]Как известно, исчезновение выражений (29) означает, что (31) есть точный дифференциал $df$, а исчезновение (30) показывает, что к таковому можно привести данную форму умножением на некоторую функцию.

[2]Stokes: Cambridge Trans. 9=Papers Bd. 2, p. 255 et al. Я руководствуюсь в основном статьей Абрагама (Abraham) в Энциклопедии IV, 14, где можно найти много отдельных интересных замечаний, которые я здесь не в состоянии воспроизвести.

Тогда для «скалярного» потенциала $f$ находим:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{33}$$

а для «векторного» потенциала $(U, V, W)$:

$$-\nabla^2 U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad -\nabla^2 V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad -\nabla^2 W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{34}$$

т. е. приходим к дифференциальным уравнениям, которые при подходящих предположениях о поведении $u$, $v$, $w$ на бесконечности, а также о виде присущих им сингулярностей — решаются известными методами теории потенциала посредством определенных интегралов:

$$f(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \quad \text{и т. д.} \tag{35}$$

## § 6. Теоретико-инвариантное представление в векторном исчислении

Представив выше векторное исчисление как своего рода увенчание или плод теории инвариантов группы ортогональных подстановок (без отсылки к наглядно-геометрическим рассмотрениям), мы не можем умолчать, что в литературе обычно проходят мимо такого представления.

В этом смысле известны только немногие исключения, из которых я приведу два.

Первое относится к вообще очень интересному сочинению, которое опубликовал еще в 1855–56 гг. выдающийся английский физик и инженер Ранкин в London Philosophical Transactions, Bd. 146[1]. Местное искажение структуры упругого тела при бесконечно малых смещениях $u$, $v$, $w$ его точек, как известно, задается 6 компонентами

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right). \tag{36}$$

[1]On axes of elasticity and crystalline forms. (Об осях упругости и кристаллических формах.)

Ссылаясь непосредственно на появившиеся тогда основополагающие разработки Сильвестра, Ранкин трактует указанный «тензор» теоретико-инвариантными методами точно так, как мы бы и сейчас это сделали.

Далее возьмем работу Буркхардта (Burkhardt) в 43 томе Math. Ann. (1893)[1]. Как раз перед этим поставил Друде (Drude) в своих оптических исследованиях такой вопрос:

«Дано произвольное число векторных величин как функций положения одной или многих точек: требуется из них самих и их производных по координатам составить максимально общим образом такие функции, которые тоже представляли бы собой векторные величины», — который Буркхардт уточнил сперва в том смысле, что допускаются только рациональные целые функции относительно компонентов заданных векторов, линейные относительно производных по $x$, $y$, $z$; после этого вопрос решается методичными разложениями в ряды, обычными в теории линейных инвариантов. Этим достигается лучшее проникновение в структуру линейных дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике непрерывных сред. Итак, в самом деле полезно привлекать знания из теории инвариантов.

Почему так мало подобных публикаций? Почему, в частности, суждено было затухнуть намерению Ранкина связать математико-физические работы своих соотечественников с формально алгебраическими? Мы видим, что в Англии осталось резкое противостояние обеих школ: теория инвариантов с ее проективной интерпретацией показалась физикам чем-то совершенно лишним, и, в самом деле, спросил же меня однажды эдинбургский физик Тэт (Tait) относительно Кели: не досадно ли, что этот выдающийся человек вкладывает свои усилия в до такой степени бесполезные проблемы?

Мне кажется желательно вникать в эти щекотливые обстоятельства потому, что они не представляют собой в современной математике ничего исключительного, напротив, повторяются сходным образом в разнообразнейших сферах по самым различным поводам.

Вероятно, главная причина состоит в том расширении, которое чем дальше, тем больше претерпевает наука. У отдельного исследователя больше нет времени — или кажется, что нет — получить обстоятельное математическое образование. В случае необходимости он предпочитает специально изобретать что-то от себя и при этом больше, чем может осознать сам, связан в своем мышлении традициями той школы, внутри которой вырос. К сожалению, при этом уже не оказывается места для осознания единства всех видов математического исследования.

[1] Über Funktionen von Vektorgrößen, welche selbst wieder vektorgrößen sind. (О функциях векторных величин, которые сами снова являются векторными величинами.)

В случае векторного анализа надо еще принять во внимание, что данная область была, так сказать, уже заранее насыщена символическими методами Гамильтона и Грассмана. Кто однажды привык к формулам определенного вида, с трудом решается продумать суть и взвесить возможные преимущества других способов записи, тем более, способствовать их распространению. Это слишком хорошо подтвердилось при дальнейшем накоплении соответствующей литературы, которую мы ниже можем только бегло представить. Действительно, налицо лишняя трата сил: те же самые по сути построения появляются вновь и вновь в каком-нибудь ином виде. Возникает путаница, и воображаешь себе поток, который мог бы оказать большие услуги судоходству, но вместо того разветвляется до бесконечности.

Важная задача этой книги — противодействовать отмеченному неприятному положению вещей[1].

## § 7. О развитии учения о векторах в различных странах после трактата Максвелла

Развитие, о котором здесь пойдет речь, можно кратко охарактеризовать так: из рассуждений физиков и идей Грассмана образуются комбинации, несущие на себе преимущественный отпечаток то тех, то других.

В первую очередь мы должны представить работы Гиббса, но поскольку до сих пор в этой книге не заходила речь об американских математиках, позволительно несколько отвлечься от темы.

Еще 50 лет не прошло[2], как Америка стала принимать самостоятельное участие в развитии чистой математики. Начало этому сперва положил в 1870 астроном Бенджамин Пейс (Peirce) (увлекательно также преподававший), представив в Национальную Академию Вашингтона свою «Линейную ассоциативную алгебру», где он пытался очертить различные возможности для многочисленных комплексных числе. От его преподавательской деятельности идет и тот блестящий подъем теоре-

[1]В этой связи следует упомянуть сочинение голландца Схоутена (F. A. Schouten. Grundlagen der Vektor und Affinoranalysis, 1914). Основывая изложение в принципе на Эрлангенской программе, он стремится найти подходящее место для разработок гамильтонианцев. Это в точности то, что было бы желательно здесь, и тем более мною приветствуется, что автор строгими рассуждениями о соотношениях более высокой степени выходит далеко за пределы затронутых здесь нами *элементов* теории. К сожалению, вместо давно установившихся процессов линейной теории инвариантов, он интенсивно использует заново вводимую символику умножений, так что я, например, счел для себя невозможным следовать ему в деталях.

[2]К концу первой мировой войны, когда Клейн читал свои лекции. — *Прим. перев.*

тической астрономии, который связан с именами Ньюкома (Newcomb) и Хилла (Hill). Все же оставалась Америка еще много лет страной математического импорта[1], приезжали ли оттуда молодые математики учиться у нас или же туда звали наших математиков. Чрезвычайно важна была, в частности, деятельность Сильвестра в 1876–1883 во вновь созданном университете Джона Гопкинса в Балтиморе. Он основал там, между прочим, первый из ведущих математических журналов Америки, «American Journal of Mathematics». Если посмотреть дальнейшие даты, в 1891 было организовано Нью-Йоркское математическое общество, вскоре расширившееся в «Американское математическое общество»; со всемирной выставкой 1893 в Чикаго был связан, между прочим, и математический конгресс[2], а с 1900 выходят собственные «Transactions» Математического общества. Таковы указания на результат систематического усвоения европейской науки: развитие математической самостоятельности идет все дальше, благодаря чему сегодня Америка стойт как равноправная рядом с более старыми культурными нациями.

Таким образом, названы некоторые бросающиеся в глаза моменты. Дж. В. Гиббс, о котором я в особенности должен рассказать, развился тем временем в тихой уединенности. В 1866–1869 он учился в Европе, в частности, в 1868–1869 у Кирхгофа (Kirchhoff) и Гельмгольца (Helmholtz) в Гейдельберге. В остальном он провел всю свою жизнь (1839–1903) в своем родном штате Коннектикут. Только в 1873 вышли две его первые публикации (о диаграммах механической теории тепла), за которыми последовало в 1876–1878 большое сочинение «On the equilibrium of heterogeneous substances» («О равновесии гетерогенных веществ»), которая сделалась основополагающей для физической химии[3]. Относительно векторного анализа Гиббс выпустил сперва в 1881–1884 методическое пособие для своих студентов (Нью-Хавинского университета), которое позже (1901) Вильсон издал в расширенной форме как учебник. Незадолго до своей смерти Гиббс опубликовал еще свой труд по статистической механике (1902). Все, написанное Гиббсом, хорошо продумано и представлено в образцовом порядке. Не стóит удивляться, что он чувствовал склонность прежде всего к строго расчлененной логике Грассманова Учения о протяженности. Это приводило его многократно к дискуссиям с кватернионистами, в традициях которых он вырос[4].

---

[1] Америка и сейчас является страной математического импорта.— *Прим. ред.*

[2] Собрание там представленных работ содержит еще преимущественно иностранные имена, больше всего немецких. Я сам тогда выступал с докладами, которые в 1894 были изданы под заглавием «The Evanston Colloquium». Ср. F. Klein, Собр. соч. т. 2, с. 5.

[3] См. т. 1, конец пятой главы.

[4] См. многие места в двухтомном собр. соч.: The scientific papers of F. Willard Gibbs.

Гиббсово представление векторного анализа, далеко простирающее свое влияние на физические круги, в самом деле позволяет оставить в стороне понятие (4-членного) кватерниона и оперирует прежде всего с вектором (трехмерного пространства) как таковым. При этом он уделяет особое внимание общей линейной векторной функции Гамильтона или, при нашем способе выражения, общей билинейной форме $\sum \alpha_{ik} x_i y_k$ как эквиваленту. Может случиться, что такая билинейная форма распадается в произведение двух линейных сомножителей: $\sum b_i x_i \cdot \sum c_k y_k$. Гиббс называет ее тогда *диадой*. Ему кажется проще сперва обосновать «исчисление диад», а общую билинейную форму, которую он соответственно называет «диадической», воспринимать как сумму различных диад. Очевидно, диада есть такая билинейная форма, у которой все миноры матрицы

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль. Этими пояснениями я ограничиваюсь.

С формой, которую векторный анализ принял у Гиббса, в сущности согласуются разработки Хевисайда (Heaviside) в Англии[1]. Хевисайд известен физикам как один из первых, кто стал успешно применять электромагнитную теорию Максвелла к многочисленным конкретным проблемам; между прочим, находим мы у него впервые точно выписанными дифференциальные уравнения, называемые именем Максвелла, которые сам Максвелл описал только словами. Инженер-телеграфист, ведущий у себя дома частную жизнь, Хевисайд никогда не страдал меланхолией, но находил поводы для здорового юмора. Очень занятно читать его построения векторного анализа, перемежающиеся полемическими вставками.

С Хевисайдом близко связано и первое самостоятельное представление, которое векторное исчисление нашло в Германии. Это — «Geometrie der Wirbelfelder» (1897) («Геометрия вихревых полей») А. Фёппля (A. Föppl), разработка кратко выраженных им самим соответствующих представлений в «Einleitung in die Maxwellsche Theorie» (1894) («Введение в теорию Максвелла»). Из обеих этих публикаций позднее возникла обработанная Абрагамом (Abraham) «Theorie der Elektrizität» («Теория электричества»), являющаяся теперь одним из самых распространенных учебников в данной области. В то же время век-

London 1906. Русские переводы отдельных работ Гиббса: *Термодинамические работы*. М., 1950. — *Основные принципы статистической механики*. М.-Л., 1946. — *Прим. перев.*

[1]См. особенно Heaviside. Electromadnetic theory (1894), vol. 1, p. 132–305=«Elements of vectorial algebra and analysis.»

торный анализ в той или иной форме проник во все учебники математической физики или механики. Наряду с этим возникли в большом числе ad hoc сжатые сводки: я назову здесь в алфавитном порядке Bucherer, Gauß, Jahnke, Ignatowski, Valentiner[1].

Несколько более объемистый учебник технической направленности недавно выпустил Шпильрейн (Spielrein).

Я не ставлю своей задачей обсуждать эти различные отдельные представления. Однако необходимо подчеркнуть, что учение о векторах в них в общем понимается как нечто противопоставленное аналитической, т. е. координатной геометрии, развивающееся независимо от нее и, может быть, даже напрашивающееся служить ее основой. Получается как раз наоборот в сравнении с теоретико-инвариантным взглядом на геометрию, который мы здесь защищали и который связывает употребление координат с подвижностью пространственного восприятия посредством группы преобразований как промежуточной инстанции. Противостояние, о котором идет речь, возникло в Англии, где «poor old Cartesian with his axes» («бедный старый Декарт с его осями») стоит на первом месте в полемических выступлениях[2].

Скажем еще об итальянцах. Можно было заранее ожидать, что доктрины Грассмана, едва сделавшись известными, найдут там хороший прием, поскольку как основные черты геометрического представления, так и логическая расчлененность в Италии очень распространены. Действительно, уже в 1888 опубликовал Пеано (Peano) в Турине примечательный учебник: «Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, proceduto delle operazioni della logica deduttiva» («Геометрическое исчисление согласно Учению о протяженности Г. Грассмана, выведенное из операций дедуктивной логики»).

С термином «logica deduttiva», который призван устранить неопределенности, возникающие из-за многозначности нашего обычного языка, посредством введения определенных символов для логических отношений разного вида, мы еще должны иметь дело в дальнейшем ходе изложения[3]. Здесь только заметим, что Пеано в своей книге ограничивается пространством 3 измерений и достаточно идет навстречу физикам, чтобы принимать обозначения векторов и т. д.

---

[1]Книга Budde: Tensoren und Dyaden in dreidimensionalen Raum носит, скорее, монографический характер.

[2]Первоначально у сэра Роберта Болла (Ball) в его забавной речи о значении теории винтов для механики твердых тел (Британская Ассоциация, Манчестер). Примечательно, что эти господа, запрещая оси, тем не менее сохраняют привелигированное положение начала координат.

[3]Этот раздел Клейн не смог завершить. — *Прим. ред.*

Из школы Пеано вышли, в частности, два сегодняшних борца за учение о векторах в Италии: Бурали Форти (Burali Forti) (в Турине) и Марколонго (Marcolongo) (в Неаполе). Им мы обязаны написанием учебников, среди которых два вышедших 1909: «Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla mechanica e alla fisica mathematica» («Элементы векторного исчисления с многочисленными приложениями к геометрии, механике и математической физике») и «Omografie vettoriale» (гомография — это наши аффинные построения). Обе эти публикации недавно (1912/13) вышли во французском переводе как единая книга «Analyse vectorielle générale» («Общий векторный анализ»).

## Пояснения к первой главе

1. Стр. 15: «унимодулярный» — значит с определителем подстановки $|S_{ik}| = 1$. Если предполагать только $|s_{ik}| \neq 0$, то из арифметических соображений целесообразно обобщить понятие инварианта; тогда инвариантами считают все полиномы $J(x_1, \ldots, x_n)$, которые в силу (1) удовлетворяют условию:

$$J(x_1, \ldots, x_n) = J(x'_1, \ldots, x'_n) \cdot |s_{ik}|^r \quad (r \geqslant 0, \text{ целое}).$$

Только при $|s_{ik}| = 1$ получается простейшее определение инварианта $J(x) = J(x')$. Аналогично поступаем с ковариантами и совместными инвариантами. Если $(x)$, $(x')$ обозначают декартовы координаты в $n$-мерном пространстве, а (1) рассматривается как его точечное преобразование, то, в частности, объем любого $n$-мерного параллелепипеда как функция координат его вершин есть совместный инвариант по отношению к (1) (ср. § 3); таковой умножается в силу (1) на $|s_{ik}|$ и, следовательно, только при $|s_{ik}| = 1$ остается неизменным. Поэтому унимодулярные подстановки называют также «сохраняющими объем» (ср. W. B. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie* II, Berlin 1923)[1].

2. Стр. 17. Это рассуждение отнюдь не связано с каким-то отдельным искусственным приемом; напротив, за ним стóит один из важнейших в теории, метод сопоставления форм степени $n$ с $n$-ми степенями линейной формы; он ведет к символическому исчислению (ср. Вейценбек (Weitzenböck) цит. в начале этой главы). Утверждение в тексте поэтому следует осветить точнее.

[1]Между тем вышло в свет: Marcolongo. *Relativitá* (относительность). Messina 1923. Ср. с примечанием 1 к 3 главе. — *Прим. ред.*

Пусть $S$ — индуцируемая (1) в общем случае матрица подстановок величин $a_{ik}$.

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{1N} \\ \dots & \dots \\ S_{N1} & S_{NN} \end{pmatrix} \quad \left(N = \frac{n(n-1)}{2}\right).$$

$T$ — пусть матрица подстановок величин $u_i\, u_k$, если $(u)$ считаются контрагредиентными к $(x)$; нужно доказать $S = T$.

Для этого заметим, что $u_i\, u_k$ во всяком случае можно, помимо $T$, преобразовывать и подстановкой $S$; эти произведения ведь можно рассматривать как одну из возможных систем $a_{ik}$. Следовательно, $u_i\, u_k = T(u'_i\, u'_k) = S(u'_i\, u'_k)$. Вычитанием получаем отсюда $N$ уравнений вида

$$0 = (S_{l_1} - T_{l_1}){u'_1}^2 + (S_{l_2} - T_{l_2})u'_1\, u'_2 + (S_{l_3} - T_{l_3}){u'_2}^2 + \ldots + (S_{lN} - T_{lN}){u'_N}^2,$$
$$(l = 1, \ldots, N).$$

Если бы не было $S = T$, среди уравнений нашлось бы такое, в котором не все коэффициенты при $u'_i\, u'_k$ исчезают; оно было бы линейным соотношением между $u'_i\, u'_k$ и, стало быть, квадратным уравнением для самих $u'_i$, вопреки предположению о взаимно независимом выборе $u'_i$.

3. Стр. 20. Точнее, если шесть чисел $r_{12}, \ldots, r_{34}$ удовлетворяют равенству $p = 0$, то всегда найдутся такие восемь чисел $x_1, \ldots, x_4$, $y_1, \ldots, y_4$, что $r_{12} = x_1\, y_2 - x_2\, y_1$ и т. д. Доказательство смотри в примечании 5.

4. Стр. 23. Здесь использован прием, очень действенный как в теории инвариантов, так в особенности в геометрии. Именно, из линейности и однородности подстановок, которые испытывают компоненты комплексов, следует:

а) Комплекс *исчезает тождественно* (т. е. все его компоненты в *любой* системе координат обращаются в нуль), если его компоненты равны нулю в *какой-нибудь одной* системе координат.

б) Покомпонентное сложение когредиентных комплексов дает в сумме комплекс, когредиентный слагаемым, следовательно, «допустимо» комплексы складывать, аналогично «допустимо» умножать их на постоянные или на инварианты.

Из а) и б) получается: Пусть у двух когредиентных комплексов компоненты совпадают в какой-нибудь специальной системе координат $S_0$, тогда соответствующие разности компонентов обоих комплексов равны нулю в $S_0$ и, следовательно, всегда. Комплексы равны между собой в любой системе координат.

Так и в тексте при установлении равенства комплексов было важно подобрать такую систему координат, в которой компоненты принимали бы по возможности простые значения.

5. Стр. 23. Отсюда следует доказательство утверждения, сформулированного в примечании 3.

Величины $p_{ik}$ изображают прямую, если они все одновременно не равны нулю; координаты же $x_1 \ldots x_4$, $y_1 \ldots y_4$ должны принадлежать этой прямой. Надо воспользоваться возможностью смещения этих точек вдоль прямой; целесообразно зафиксировать их на двух разных координатных плоскостях. Положив конкретно $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, мы должны решить уравнения:

$$\begin{aligned} p_{12} &= x_1 y_2 & r_{23} &= -x_3 y_2 \\ p_{13} &= x_1 y_3 & r_{24} &= -x_4 y_2 \\ p_{14} &= x_1 y_4 & r_{34} &= x_3 y_4 - x_4 y_3. \end{aligned}$$

Примем $p_{12} \neq 0$ (иначе просто пришлось бы выбрать другие координатные плоскости). Взяв $x_1 = 1$, однозначно определяем оставшиеся $y_2$, $y_3$, $y_4$, $x_3$, $x_4$ как конечные величины из первых пяти уравнений. Последнее же в силу $P = 0$ удовлетворяется само собой.

Наконец, если исчезают все $p_{ik}$, условие $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, очевидно, выполняется при произвольных $x_i$ и $y_i = \nu x_i$ с произвольным $\nu$.

6. Стр. 29. Согласно принципу, объясненному в примечании 4, нужное утверждение при $n = 4$ следует отсюда в общем случае, если удается доказать, что выражения $D'$, $D_1''\ldots$ — инвариантны; но это легко проверяется с помощью теоремы об умножении определителей.

7. Стр. 29. «С данной $f$» это значит при ограничении подстановками, сохраняющими эту $f$ неизменной.

8. Стр. 35. «Идея непрерывности». — Здесь вводится «принцип переноса Гессе–Клейна». Коэффициенты формы или компоненты комплекса истолковываем как координаты в некотором новом «пространстве форм». Каждому точечному преобразованию первоначального пространства соответствует точечное преобразование пространства форм. Получается геометрический образ «индуцированных подстановок». Успешное использование такого приема осуществлено, например, в работе P. J. Myrberg: Untersuchunden über die automorphen Funktionen beliebig vieler Variabeln (Исследования автоморфных функций произвольного числа переменных), Math. Ann. 46, S. 215–336. 1925.

9. Стр. 37. Основополагающее различие симметричных и антисимметричных комплексов. Оно является примером однозначного разложения линейных величин самого разнообразного вида на составляющие, которые характеризуются известными общими правилами симметрии; подобные правила суть действительные *свойства комплексов*, не зависящие от системы координат. Ср. B.v.d. Waerden. Identitäten der Invariantentheorie, (Б. ван дер Варден: Тождества теории инвариантов.) Math. Ann. 95, 1926.

10. Стр. 41. Клейн проявлял живой интерес к формализму геометрических представлений и расчетов, так что в его сочинениях и лекциях многократно повторяется полемика о значении проективной геометрии, об Эрлангенской программе, о векторном способе записи и т. п.

Редактор (немецкого издания) счел возможным для данной книги сжать большую часть всего этого, тем более что формальное развитие теории относительности и дифференциальной геометрии перешагнуло то состояние, которое было у Клейна перед глазами.

Опущен в этом разделе заключительный параграф рукописи: «§ 8. Современные попытки унификации векторных обозначений.» Сильно сокращены §§ 1, 2. § 3 следовал первоначально за § 6. Это расположение было, вероятно, оправдано только в лекциях непринужденной формы, из которых выросла данная книга.

11. Стр. 50. К §§ 4, 5. Одновременно с общей теорией относительности сейчас распространилось словоупотребление, идущее от исчисления Риччи (Ricci); понятия вектор, тензор и т. д. больше не являются атрибутами только ортогональный группы, но вводятся посредством исчисления Риччи в дифференциальную геометрию общих точек преобразований. Построение инвариантов, векторов и тензоров в § 4, 5 также становится легче обозримым с позиций исчисления Риччи.

12. Стр. 56. Подробный вывод: $\lambda_{ik}$ контрагредиентны к $x_i y_k - y_i x_k = p_{ik}$. Так как согласно формуле (13) на стр. 29 сумма $\sum p_{ik}^2$ инвариантна, $p_{ik}$ претерпевают ортогональные подстановки. Поэтому в соответствии с заключительным замечанием на стр. 54 $\lambda_{ik}$ также когредиентны к $p_{ik}$, $\sum \lambda_{ik}^2$ и $\Lambda$ — в самом деле инвариантны, а преобразования $\lambda_{ik}$ ортогональны.

# Глава 2

# Специальная теория относительности в механике и математической физике

Теперь пора обсудить то применение, которое простые теории, разобранные в предыдущей главе, находят в наше время в механике и математической физике. Уступая этому господствующему у физиков словоупотреблению, мы будем повсюду говорить не о теории инвариантов по отношению к предложенной группе линейных (позже и нелинейных) подстановок, а о теории относительности какой-либо группы. Действительно, за словами «теория относительности» по сути дела всегда стоит некая предлагаемая группа, и только неточность языка, даже у выдающихся авторов, делает порой возможным такое толкование, словно речь идет всего-навсего о понимании движения как чего-то «относительного».

Но прежде чем обратиться к главному предмету этой главы, к *теории относительности группы Лоренца*, мы должны показать, как уже в классической механике, (в особенности в небесной механике, которую надо рассматривать как первоисточник и вообще всей математической физики) издавна, т. е. с эпохи ее обоснования Галилеем и Ньютоном, приобрела значение, соответственно представленная, *вырожденная форма группы Лоренца*. Разумеется, первоначально неосознанным путем. Тем привлекательнее будет упорядочить некоторые известные основные положения небесной механики задним числом в соответствии с привычными для нас теоретико-групповыми точками зрения.

## А. Классическая небесная механика и теория относительности группы Галилея – Ньютона

### § 1. Определение и значение группы, происходящей от дифференциальных уравнений задачи $n$ тел

Мы здесь не собираемся начинать с разбора закона земной тяжести (установленного Галилеем в 1602) или всемирного тяготения Ньютона

(Philosophiae naturalis principia mathematica. Математические принципы натуральной философии. 1687), а сразу приступим к сути дела. Дифференциальные уравнения задачи $n$ тел, содержащиеся сейчас во всех учебниках, гласят:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= \varkappa^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^3}, \\ \ddot{y}_i &= \varkappa^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{y_k - y_i}{r_{ik}^3} \quad (i = 1, \ldots, n), \\ \ddot{z}_i &= \varkappa^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{z_k - z_i}{r_{ik}^3}. \end{aligned} \tag{I}$$

Здесь $\varkappa^2$ — так называемая гравитационная постоянная:

$$\varkappa^2 = 6,675 \cdot 10^{-8} [\text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}].$$

К этим уравнениям мы немедленно подойдем с вопросом: при каких линейных подстановках переменных $x$, $y$, $z$, $t$ они остаются неизменными.

Возможно, для физиков всего удобнее начать с так называемого пересмотра масштабов. Уравнения I остаются неизменными при «преобразовании подобия»:

$$x_i' = \lambda^2 x_i, \quad y_i' = \lambda^2 y_i, \quad z_i' = \lambda^2 z_i, \quad t' = \lambda^3 t, \tag{1}$$

которое очевидным образом угадывается в известном так называемом 3-м законе Кеплера («Квадраты периодов обращения ведут себя как кубы больших полуосей»). Оказывается, однако, что как раз здесь мы имеем дело с шагом, не ведущим в дальнейшем к обобщению, и приходится, как ни прискорбно, в нижеследующем изложении оставлять преобразование (1) в стороне.

Затем мы наблюдаем неизменность наших уравнений:

a) при произвольном параллельном переносе системы $(x, y, z)$:

$$x_i' = x_i + \xi_1, \quad y_i' = y_i + \xi_2, \quad z_i' = z_i + \xi_3; \tag{2}$$

b) при ее «вращениях вокруг начала координат» или «переворачиваниях с закрепленным $O$», т. е. при ортогональных подстановках:

$$\begin{cases} x_i' &= \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i, \\ y_i' &= \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i, \\ z_i' &= \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i, \end{cases} \tag{3}$$

с определителем +1 или $-1$;

c) наконец, при подстановках, содержащих $t$, именно при тривиальной операции

$$t' = \pm t + \xi_4 \tag{4}$$

и при подстановках:

$$x_i' = x_i + \varepsilon_1 t, \quad y_i' = y_i + \varepsilon_2 t, \quad z_i' = z_i + \varepsilon_3 t, \tag{5}$$

означающих равномерное поступательное перемещение координатной системы со временем (в то время как в заменах (2), (3) время вообще не участвует; наш язык опять-таки слишком неловок, чтобы четко выразить выступающее здесь принципиальное различие каким-нибудь кратким словом).

Формулы (2) и (3) (каждая из которых содержит 3 независимых параметра) вместе дают ту самую $G_6$, которую сейчас предпочитают называть *евклидовой группой*, точнее, это совокупность конгруэнтных замен системы $(x, y, z)$. Операциями (4) и (5) такая группа расширяется до $G_{10}$, которую называют *группой Галилея – Ньютона*. Придерживаясь понимания матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

как ортогональной, задаем последнюю группу системой формул

$$\begin{cases} x_i' &= \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i + \varepsilon_1 t + \xi_1 \\ y_i' &= \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i + \varepsilon_2 t + \xi_2 \\ z_i' &= \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i + \varepsilon_3 t + \xi_3 \\ t_i' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \pm t + \xi_4. \end{cases} \tag{II}$$

Глубокую значимость этой десятипараметрической группы можно сжато охватить, сказав, что из классической небесной механики (которая находит свое наиболее ясное выражение в уравнениях I) о свойствах Солнечной системы выводятся только заключения, *инвариантные относительно данной группы*. При этом, пока дело касается евклидовой группы (2), (3), вряд ли еще можно ощутить особенное пополнение знаний. Большой интерес вызывают подстановки (4) и (5). Возможность изменения знака при $t$ означает «обратимость» движений: я могу взаимно переставить прошлое и будущее; если я в какой-то момент мысленно поверну обратно все скорости, то все движение должно пойти вспять по уже пройденному пути. Подстановки (5) многократно ставились в связь с известным высказыванием, что «центр тяжести Солнечной системы движется равномерно с неизвестной скоростью в неизвестном направлении»[1]. Подстановки (5) точно так же свидетельствуют об остающемся неопределенным параллельном переносе.

Но это не относится к однородному вращению. Тут мы могли бы ожидать ортогональные преобразования по типу:

$$x' = x\cos\psi + y\sin\psi, \quad y' = -x\sin\psi + y\cos\psi,$$

где $\psi$ пропорционально $t$, но таковые в нашу группу как раз и не входят.

Обсудим попутно один пункт. Воздействие сил тяготения, описываемое I, часто называют «дальнодействием», в отличие от близкодействия, которое опосредуется средой, заполняющей пространство. В действительности при этом переоценивают внешнюю форму уравнений. Допустим, я пишу (ради краткости выражения) вместо I:

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \text{и т. д.,}$$

тогда каждый член выступающей здесь потенциальной энергии

$$U = -\varkappa^2 \sum_{ik} \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \tag{6}$$

можно интерпретировать как «основное решение» некоторого дифференциального уравнения в частных производных $\Delta = 0$. Привлекая таким образом дифференциальное уравнение в частных производных, мы попадаем в область действия теорий с близкодействием. Происходит не реформа логической основы, а чисто психологическая смена сопутствующих представлений. Она порой помогает делу, например, с точки зрения экспериментатора или конструктора, причем абстрактный математический смысл не меняется.

Напротив, существенную черту уравнений I мы видим в том, что они не содержат $t$ в явном виде, представляя гравитацию как «мгновенное действие», которое зависит только от моментальной конфигурации системы, без «запаздывающего действия». На это противопоставление мы далее еще будем обращать внимание.

В группе Галилея–Ньютона переменная $t$ играет, очевидно, особую роль. Ради наглядности интерпретируем $x$, $y$, $z$, $t$ как точечные ко-

[1]По современным астрономическим данным точка на небе, куда движется Солнце (точка апекса), имеет галактические координаты $L = 56°$, $B = +23°$, $V_0 = 19,5\,\frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Эта точка находится в созвездии Геркулеса. — *Прим. ред.*

ординаты некоторого четырехмерного пространства; в нем лежит «раздельными слоями» однократно бесконечное семейство трехмерных пространств $t = \text{const}$. Далее мы будем трактовать подстановки нашей группы не как изменения системы координат, а как преобразования пространства в себя при фиксированной системе координат. Тогда, конечно, можно перевести любую точку $x$, $y$, $z$, $t$ в любую другую $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, однако многообразия $t = \text{const}$ только перемещаются друг за другом подобно листам одной книги при неизменной хотя, возможно, инвертированной пагинации[1]. Группа транзитивна, но не примитивна. Вследствие этого геометрия нашего пространства приобретает некоторый особенный характер. При всех преобразованиях величина $(t_1 - t_2)^2$ остается неизменной. В частности, если она с самого начала равна 0, то и остается нулем: *понятие одновременности двух точек оказывается абсолютным по отношению к группе.*

Разумеется, эти простые обстоятельства обсуждаются здесь только затем, чтобы подготовить переход к иным соотношениям для группы Лоренца. Впрочем, особое положение, присущее переменной $t$ в группе Галилея – Ньютона, на историческое развитие механики влияло решительно тормозящим образом. Несмотря на то, что еще Лагранж представил механику как геометрию 4 измерений, такое воззрение только в наше время стало действительно приносить пользу. Более же старые авторы имели постоянно перед собой только евклидову группу и не расширяли ее за счет преобразований (4) и (5), хотя, конечно, известных им. Мне самому пришлось увязывать все вместе, когда я работал над Эрлагенской программой. Я определенно помню, что замечание Лагранжа я не то чтобы пропустил, но не поверил, что оно включается в мой групповой принцип[2]. Только открытие группы Лоренца побудило математиков должным образом оценить и группу Галилея – Ньютона. Чтобы пояснить столь примечательное положение, желательно сейчас для примера рассмотреть предмет еще с одной специальной стороны.

## § 2. О десяти общих интегралах задачи $n$ тел классической механики

В Vorlesungen über Dynamik[3] Якоби (читались в 1842–43 в Кенигсберге, изданы Клебшем в 1866, Werke, Дополнительный том, Берлин

---

[1] Пагинация — нумерация страниц.— *Прим. ред.*

[2] Насколько помнится, я раньше систематически выпускал из виду подстановку $t' = t + \xi_4$, которая сама по себе тривиальна, вследствие чего у меня возникало впечатление, будто в пространстве $x$, $y$, $z$, $t$ речь должна идти о нетранзитивной группе! Это была бы непригодная группа, геометрию $R_4$ с ней никак не построить.

[3] Русский перевод: К. Якоби. *Лекции по динамике.* М.: ОНТИ. 1936. — *Прим. перев.*

1884) — на которые я ссылаюсь здесь, как на образец большей части современных изложений, последовательно выводятся 10 общих интегралов дифференциальных уравнений I, причем сперва речь идет о кинематическом поведении центра тяжести, затем о принципе живых сил, наконец, о площади секторов.

Сначала возьмем 3 первых интеграла, относящихся к центру тяжести («импульсные законы»), их я записываю как

$$\sum m_i \dot{x}_i = A_1, \quad \sum m_i \dot{y}_i = A_2, \quad \sum m_i \dot{z}_i = A_3, \tag{7}$$

откуда непосредственным интегрированием получаются 3 других закона для центра тяжести:

$$\sum m_i x_i = A_1 t + B_1, \quad \sum m_i y_i = A_2 t + B_2, \quad \sum m_i z_i = A_3 t + B_3. \tag{8}$$

Затем закон сохранения энергии:

$$T + U = h \tag{9}$$

(где $T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$ и $U = -\varkappa^2 \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}$).

Наконец, 3 закона площадей, которые я тоже обстоятельно выписываю:

$$\begin{gathered} \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = C_1, \quad \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = C_2, \\ \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = C_3. \end{gathered} \tag{10}$$

Вывод этих законов проделывается у Якоби отчасти систематически в современном смысле, именно, только для равенств (7) и (10), когда привлекаются те бесконечно малые преобразования, которые содержит евклидова группа. Отмечая все время буквой $\delta$ бесконечно малые приращения или бесконечно малые постоянные, я располагаю сперва бесконечно малыми смещениями

$$\delta x = \delta\xi_1, \quad \delta y = \delta\xi_2, \quad \delta z = \delta\xi_3,$$

затем бесконечно малыми поворотами

$$\begin{array}{c|c|c} \delta y = z \cdot \delta\varphi & \delta z = x \cdot \delta\chi & \delta x = y \cdot \delta\psi \\ \delta z = -y \cdot \delta\varphi & \delta x = -z \cdot \delta\chi & \delta y = -x \cdot \delta\psi. \end{array}$$

Эти бесконечно малые добавки к координатам Якоби вводит в принцип виртуальных перемещений и получает из него как раз равенства (7) и (10). Равенства же (8) и (9), хотя выводятся совсем просто и естественно формальным интегрированием, противостоят (7) и (10) как изолированные факты, вместе они не связываются.

Напротив, рассматривавшие группу Лоренца сделали важный шаг вперед в том отношении, что энергетическое равенство (9) оказывается увязанным с импульсным в единое поле, а законы центра тяжести (8) соответственно с законами площадей[1]; параллель указанным объединениям отыскивается с помощью тех бесконечно малых преобразований, которые группа Галилея – Ньютона содержит за пределами евклидовой группы. Из таковых конкретно бесконечно малое преобразование

$$\delta t = \delta\xi_4$$

привлекается к интегралу живых сил, а нижеследующие три:

$$\delta x = t\cdot\delta_1, \quad \delta y = t\cdot\delta_2, \quad \delta z = t\cdot\delta_3$$

— ко второму набору интегралов для центра тяжести. Непосредственным образом нужную параллель провел в недавнее время по моему побуждению Энгель[2] (Engel). Воспроизвести просто вклад Энгеля здесь, к сожалению, невозможно, поскольку пришлось бы вдаваться в детальные объяснения, как в теории Ли следует интегрировать такие системы дифференциальных уравнений, которые допускают какую-либо определенную непрерывную группу преобразований. В данном изложении мы ограничиваемся следующим: 1) обещаем в дальнейшем показать, что утверждаемое положение именно таково, каким получается при рассмотрении группы Галилея – Ньютона как предельного случая группы Лоренца; 2) здесь демонстрируем, что подстановки (5) действительно, помогают объединить законы перемещения центра тяжести с законами площадей.

Начнем, однако, с закона живых сил, для которого еще Игнац Шюц (Ignaz Schütz) указал объединительную роль этих подстановок в примечательной заметке в Göttinger Nachrichten 1897 (под названием: Принцип абсолютного сохранения энергии). Подставив в формулу

$$\frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + U = h$$

[1] Ср. указание Герглоца (Herglotz). Ann. d. Shys. (4). Bd. 36, 1911, S. 512–513 (Über die Mechanik des deformierbaren Körpers — О механике деформируемого тела — и т. д.).

[2] Gött. Nachr. 1916, Heft 2.

вместо $x$, $y$, $z$ соответственно $x+\varepsilon_1 t$, $y+\varepsilon_2 t$, $z+\varepsilon_3 t$, мы вправе требовать, чтобы и новая сумма

$$\frac{1}{2}\sum m_i\big[(\dot{x}_i^2+\varepsilon_1)^2+(\dot{y}_i^2+\varepsilon_2)^2+(\dot{z}_i^2+\varepsilon_3)^2\big]+U$$

оставалась постоянной при произвольных $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, откуда сами собой следуют первые интегралы для центра тяжести («импульсные законы»):

$$\sum m_i\dot{x}_i=A_1,\quad \ldots,$$

Таким же образом мы теперь можем захотеть присоединить нечто к законам площадей:

$$\sum m_i(y_i\dot{z}_i-z_i\dot{y}_i)=C_1\quad \text{и т. д.}$$

Тогда получаются в левой части дополнительные члены:

$$\varepsilon_3\Big(\sum m_iy_i-t\sum m_i\dot{y}_i\Big)-\varepsilon_2\Big(\sum m_iz_i-t\sum m_i\dot{z}_i\Big),\quad \ldots,$$

Снова требуем, чтобы левые части тем не менее сводились к постоянным (как бы ни выбирались $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$). Это дает уравнения вида:

$$\sum m_ix_i=t\sum m_i\dot{x}_i+B_1$$

и если еще сюда подставить вместо $\sum m_i\dot{x}_i$ их значения как первых интегралов для центра тяжести, то получаем соответствующие интегралы второго типа, что и требовалось доказать.

Несомненен шаг вперед в сравнении с изложением у Якоби. Желающие могли бы вообще разработать систематическую теорию инвариантов (теорию относительности) группы Галилея – Ньютона, сходную проблему мы разбирали по поводу работы Буркхардта для однородной ортогональный группы (гл. I **В**, § 6). Сюда включилось бы и то, что́ сделано, в частности Штади и Вейценбеком для евклидовой группы[1]. Естественно, никто не рассчитывает, что от этого как-либо изменится практическая трактовка задачи $n$ тел I. Но, может быть, удастся сознательнее действовать при оптимизации выбора переменных, который издавна определялся наивными соображениями.

[1]Stude, E.: Geometrie der Dynamen (Геометрия движений). Leipzig 1903. Weizenböck, R.: Über Bewegungsinvarianten (Об инвариантных движениях). Wiener Sitzungsberichte 1913 etc.

# В. Электродинамика Максвелла и теория относительности группы Лоренца

Как и в разделе **А**, не претендуя на обширные разработки, мы направляем острие анализа на систему простейших дифференциальных уравнений и задаемся вопросом нахождения тех линейных подстановок участвующих переменных, при которых она остается неизменной. Вообще наши рассуждения — включая вплетенные сюда исторические экскурсы — будут существенно м а т е м а т и ч е с к о г о сорта, отношение к физике проявляется только в выборе их направления и примечательных пунктов. Возможно, возникающее таким образом, замкнутое в себе представление из-за единообразия хода мыслей как раз и представит интерес также для физиков.

## I. Введение

### § 1. Уравнение Максвелла для свободного эфира

О самом Максвелле мы уже обстоятельно говорили в пятой главе т. I, и так, в частности, уже было показано, что уравнения Максвелла для свободного эфира — которые должны быть исходным пунктом и основой для всех построений начатой нами главы — в математическом смысле совпадают с уравнениями, которые в 1839 установил Мак-Куллаг (Mac Cullagh) для придуманной им модели однородной среды, покуда мы принимаем последнюю изотропной. Запишем теперь эти уравнения в форме, которую им придали Хевисайд и Герц (Hertz).

Хевисайд воспользовался векторным способом записи. Оба векторных поля, носителем которых является эфир: электрический вектор $E$[1] и магнитный вектор $H$, согласно обозначениям Максвелла[2], связаны тогда следующими уравнениями:

$$\text{a)}\ \frac{\dot{E}}{c} = \operatorname{curl} H, \qquad \text{b)}\ \frac{\dot{H}}{c} = -\operatorname{curl} E,$$

к которым присоединяются совместимые с ними еще равенства для дивергенции

$$\text{a)}\ \operatorname{div} E = 0, \qquad \text{b)}\ \operatorname{div} H = 0.$$

[1] Английское Electrician.

[2] Я не сомневаюсь, что Максвелл при выборе этих обозначений хотел противопоставить друг другу греческие буквы Эпсилон и Эта. Из Эты или английской Etsh (H) у наших физиков потом и получилось обычное немецкое $\mathfrak{H}$.

Герц употреблял расписывание по компонентам, и мы следуем его обстоятельному способу записи как базе для предстоящих детальных расчетов. Он использует левую координатную систему. $X$, $Y$, $Z$ образуют электрический, $L$, $M$, $N$ магнитный вектор. Семейство уравнений у нас делится тогда на 2 четверки:

$$
\mathrm{I}\begin{cases}
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y}\\[2ex]
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z}\\[2ex]
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x}\\[2ex]
0 = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}
\end{cases}
\qquad
\mathrm{II}\begin{cases}
-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y}\\[2ex]
-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z}\\[2ex]
-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial x}\\[2ex]
0 = \dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{\partial M}{\partial y} + \dfrac{\partial N}{\partial z}
\end{cases}
$$

Зависимость же, существующая внутри каждого подсемейства, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} + \frac{\partial(\ )}{\partial y} + \frac{\partial(\ )}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\ )}{\partial t}. \tag{1}$$

Подсемейства I и II скоординированы между собой благодаря легко замечаемому равноправию $X$, $Y$, $Z$ с $L$, $M$, $N$. Но здесь проявляется свойство именно такого случая, когда дело ограничивается уравнениями для свободного эфира. Указанную координированность не приходится и употреблять в дальнейшем.

Приведем еще те простые формулы, которые получаются из системы I и II, когда посредством дифференцирования исключают из нее или магнитный, или электрический вектор (ср. самый конец пятой главы т. 1). При этом по предложению еще Коши, вводим регулярно встречающийся оператор[1]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box. \tag{2}$$

Тогда для электрического вектора получаются уравнения, хорошо известные из традиционной оптики

$$\Box X = 0, \quad \Box Y = 0, \quad \Box Z = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

[1]Это — оператор Даламбера.

и для магнитного вектора, естественно, точно такие же:

$$\Box L = 0, \quad \Box M = 0, \quad \Box N = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Теперь вернемся к однажды уже пройденному ходу мыслей и зададимся вопросом:

*Существуют ли линейные подстановки величин $x$, $y$, $z$, $t$ и $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$, по отношению к которым наши линейные уравнения инвариантны?*

Первый шаг указывает форма оператора $\Box$. Согласно нашим инвариантно-теоретическим воззрениям $\Box$ есть forma adjuncta[1] следующего квадратичного дифференциального выражения:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2. \tag{5}$$

Поэтому каждое отдельное уравнение $\Box = 0$ сохраняет свой вид, когда $dx$, $dy$, $dz$, $dt$ подвергаются однородным линейным подстановкам, переводящим уравнение $ds^2 = 0$ в себя, в остальном же произвольным. Поскольку преобразования подобия отпадают (как и при группе Галилея – Ньютона), мы ограничиваемся теми однородными подстановками $dx$, $dy$, $dz$, $dt$, которые оставляют неизменным с а м о $ds^2$ (и, следовательно, также $\Box$). Это дает группу с 6 параметрами, а для самих соответствующих переменных $x$, $y$, $z$, $t$ уже группу с 10 параметрами (включаются 4 константы сдвига). Таким образом нас впервые встречает *группа Лоренца*.

Однако еще вопрос, как должны себя вести $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$, пока $x$, $y$, $z$, $t$ подвергаются какой-либо подстановке группы Лоренца. Если бы имели дело только с уравнениями

$$\Box X = 0, \quad \Box Y = 0, \ldots, \Box N = 0,$$

то произвольная линейная подстановка элементов совокупности $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$ также была бы возможна, за счет чего в наше рассмотрение вошло бы еще 36 параметров. Однако помимо учтенных, должны соблюдаться равенства для дивергенции

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

и, наконец, сами уравнения Максвелла I и II. Вывод в конце концов гласит — отвлекаясь от преобразований подобия, которые мы снова оставляем в стороне — что $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$ при каждой конкретной подстановке $x$, $y$, $z$, $t$ со своей стороны также претерпевают соответствующее вполне определенное линейное преобразование. Но если бы мы

[1] Присоединенная форма.

для доказательства стали работать прямо с уравнениями Максвелла, то наткнулись бы сразу на необозримые вычисления. Зато мы сможем в следующем параграфе решить дело одним ударом, освоившись, вслед за Минковским (Minkowski) с некоторой замаскированной симметрией уравнений Максвелла.

## § 2. Группа Лоренца в ортогональной форме

Искусственный прием, с которого мы здесь начинаем, состоит в том, что вместо времени $t$ мы вводим новую переменную

$$ict = l \tag{6}$$

и далее, чтобы исключить мнимость из дифференциальных уравнений, полагаем

$$iX = U, \quad iY = V, \quad iZ = W. \tag{7}$$

Дифференциальное выражение $dS^2$ и оператор $\square$ принимают тогда простой вид:

$$\begin{gathered} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2 \\ \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2}; \end{gathered} \tag{8}$$

*группа Лоренца в той мере, в какой она действует на дифференциалы $dx$, $dy$, $dz$, $dl$, сводится к их ортогональному преобразованию.*

Уравнения же Максвелла при наглядном упорядочении их членов записываются как:

$$\mathrm{I}' \begin{cases} 0 = \qquad + \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} + \dfrac{\partial U}{\partial l} \\ 0 = -\dfrac{\partial N}{\partial x} + \quad . \quad + \dfrac{\partial L}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial l} \\ 0 = +\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} + \quad . \quad + \dfrac{\partial W}{\partial l} \\ 0 = -\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial W}{\partial z} + \end{cases} \qquad \mathrm{II}' \begin{cases} 0 = \qquad + \dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial L}{\partial l} \\ 0 = -\dfrac{\partial W}{\partial x} + \quad . \quad + \dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial M}{\partial l} \\ 0 = +\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} + \quad . \quad + \dfrac{\partial N}{\partial l} \\ 0 = -\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial z} + \end{cases}$$

Тройки $L$, $M$, $N$ и $U$, $V$, $W$ здесь вполне равноправны друг другу. Одновременно симметричную форму приобретает зависимость 4 уравнений I или II друг от друга:

$$\frac{\partial()}{\partial x} + \frac{\partial()}{\partial y} + \frac{\partial()}{\partial z} + \frac{\partial()}{\partial l} = 0. \tag{9}$$

Структура I′ и II′ при этом напоминает кососимметрические матрицы.

Все это становится еще отчетливее, если различие переменных отмечать индексами. Переобозначаем:

$$x,\, y,\, z,\, l \sim x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4, \tag{10}$$

а

$$U,\, V,\, W,\, L,\, M,\, N$$

попеременно как

$$\lambda_{14},\, \lambda_{24},\, \lambda_{34},\, \lambda_{23},\, \lambda_{31},\, \lambda_{12} \tag{11}$$

или же $\mu_{23}$, $\mu_{31}$, $\mu_{12}$, $\mu_{14}$, $\mu_{24}$, $\mu_{34}$.

Для большей гибкости формул, считаем далее $\lambda_{ik} = -\lambda_{ki}$, $\mu_{ik} = -\mu_{ki}$, $\lambda_{ii} = \mu_{ii} = 0$.

Наши уравнения I′ и II′ записываются тогда в терминах

$$\mathrm{I}'' \begin{cases} 0 = \quad\quad + \dfrac{\partial\lambda_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\lambda_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\lambda_{14}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{21}}{\partial x_1} + \quad\quad + \dfrac{\partial\lambda_{23}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\lambda_{24}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\lambda_{32}}{\partial x_2} + \quad\quad + \dfrac{\partial\lambda_{34}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\lambda_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\lambda_{43}}{\partial x_3} + \quad . \end{cases} \quad \mathrm{II}'' \begin{cases} 0 = \quad\quad + \dfrac{\partial\lambda_{34}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\lambda_{42}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\lambda_{23}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{43}}{\partial x_1} + \quad\quad + \dfrac{\partial\lambda_{14}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\lambda_{31}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{24}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\lambda_{41}}{\partial x_2} + \quad\quad + \dfrac{\partial\lambda_{12}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\lambda_{32}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\lambda_{13}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\lambda_{21}}{\partial x_3} + \quad . \end{cases}$$

а в терминах $\mu_{ik}$ как раз наоборот:

$$\mathrm{I}''' \begin{cases} 0 = \quad\quad + \dfrac{\partial\mu_{34}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\mu_{42}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\mu_{23}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{43}}{\partial x_1} + \quad\quad + \dfrac{\partial\mu_{14}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\mu_{31}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{24}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mu_{41}}{\partial x_2} + \quad . \quad + \dfrac{\partial\mu_{12}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{32}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mu_{13}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\mu_{21}}{\partial x_3} + \quad . \end{cases} \quad \mathrm{II}''' \begin{cases} 0 = \quad\quad + \dfrac{\partial\mu_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\mu_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\mu_{14}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{21}}{\partial x_1} + \quad\quad + \dfrac{\partial\mu_{23}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\mu_{24}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mu_{32}}{\partial x_2} + \quad\quad + \dfrac{\partial\mu_{34}}{\partial x_4} \\ 0 = \dfrac{\partial\mu_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mu_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\mu_{43}}{\partial x_3} + \end{cases}$$

Тот и другой способы записи имеют свои преимущества. Однако для дальнейшего оказывается лучше всего соединить блоки I″ и II‴, которые в конце концов можно записать следующим образом:

$$\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} = 0 \text{ при } i = 1,\, 2,\, 3,\, 4. \tag{12}$$

Переход к упоминавшейся теореме таков: Каждая четверка этих преобразованных уравнений остается точно так же справедливой, если ортогональная подстановка $dx_i$ сопровождается заменой $\lambda_{ik}$ и $\mu_{ik}$ по образцу компонентов 6-тензора с элементами

$$dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i,$$

где система дифференциалов $\delta x$ мыслится когредиентной к $dx$.

Проверка непосредственно опирается на наши более ранние инвариантно-теоретические выкладки. Пусть координаты $\lambda_{ik}$ и $\mu_{ik}$ принадлежат 6-тензорам, а $u_k$ какому-нибудь произвольному 4-тензору, тогда суммы

$$\sum u_k \lambda_{ik} \text{ и } \sum u_k \mu_{ik} \text{ при } i = 1,\, 2,\, 3,\, 4^*$$

оказываются тоже координатами 4-вектора. Когда на роль $u_k$ выбираются операторные символы $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, как раз и получаются левые части (12). Последние, согласно самим уравнениям (12), для данных $\lambda_{ik}$ и $\mu_{ik}$ обращаются в нуль тождественно (т. е. по компонентам). Но мы только что сказали, что имеем здесь дело с 4-вектором. В результате однородной подстановки его координаты, бывшие нулями, останутся нулевыми и после нее.

Этим, в принципе, рассмотрение вопроса завершено; в нижеследующем параграфе речь идет только о том, чтобы приспособить полученный результат к первоначальным переменным $x$, $y$, $z$, $t$ и $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$[1].

## § 3. Возвращение к $x$, $y$, $z$, $t$

Вернувшись снова от обозначений $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ к $x$, $y$, $z$, $l$ и понимая под $|\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon|$ некоторую ортогональную матрицу, я могу записы-

[1]При более точном изложении, естественно, следовало бы показать, что уравнения Максвелла остаются неизменными по отношению к ортогональным преобразованиям $dx_i$, *только* если $\lambda_{ik}$ и $\mu_{ik}$ изменяются, как предписано в тексте. — Величины, обозначенные $\lambda_{ik}$ и $\mu_{ik}$, находятся, кстати, в такой же взаимной связи, как $p_{ik}$ и $q_{ik}$ при нашем введении грассмановых ступеней (гл. I, **A**, § 2); здесь это когредиентная связь, поскольку на указанные величины переносится факт стирания различия между когредиентностью и контрагредиентностью при ортогональных преобразованиях [ср. прим. 12 к главе 1. — *Прим. ред.*]

вать подстановки группы Лоренца в следующем виде:

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \varepsilon_1 l + \zeta_1 \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \varepsilon_2 l + \zeta_2 \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \varepsilon_3 l + \zeta_3 \\ l' = \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \varepsilon_4 l + \zeta_4 \end{cases} \tag{13}$$

Здесь мы должны теперь подставить $ict$ и $ict'$ вместо $l$ и $l'$. После этого мы смотрим, как в подстановках данной группы проявляется требование вещественности всех коэффициентов, сообразно физическим применениям, и обнаруживаем, что в (13) в разряд чисто мнимых надо перевести $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ и $\alpha_4$, $\beta_4$, $\gamma_4$.

Кроме того, согласно правилу (11) раскрываем снова $\lambda_{ik}$ как $U$, $V$, $W$, $L$, $M$, $N$ и, наконец, $U$, $V$, $W$ заменяем на их значения $iX$, $iY$, $iZ$. Тогда обнаруживается, что мы должны принимать $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$ когредиентными двучленным минорам матрицы

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz & dt \\ \delta x & \delta y & \delta z & \delta t \end{vmatrix},$$

а именно,

$$\begin{cases} X \sim c(dx\delta t - \delta x\, dt),\ Y \sim c(dy\delta t - \delta y\, dt),\ Z \sim\ c(dz\delta t - \delta z\, dt), \\ L \sim (dy\delta z - \delta y\, dz),\ M \sim (dz\delta x - \delta z\, dx),\ N \sim (dx\delta y - \delta x\, dy). \end{cases} \tag{14}$$

Этим сказано все о линейных преобразованиях первоначально заданных уравнений Максвелла I и II в себя.

Мы непроизвольно возвращаемся мысленно к тому тезису, который в свое время (1832) защищал Якоби при вступлении в должность ординарного профессора в Кенигсберге (ср. т. 1, биографию Якоби в третьей главе) и который по ходу дела здесь раз за разом подтверждался: Mathesis est scientia corum, quae per se claza sunt (математика принадлежит к числу тех наук, которые ясны сами по себе). Так оно и есть, когда изучают результат задним числом. Но историческое развитие, о котором мы сейчас и хотим доложить, любит кривые тропы. Бросим же достаточно общий взгляд на физическое содержание теорий.

## § 4. О развитии учения об электричестве и атомных представлений после трактата Максвелла (1873)

О Максвелле и его трактате мы уже достаточно обстоятельно говорили в пятой главе т. 1.

Максвелл в Трактате все время держится так называемой *феноменологической* точки зрения, т. е. принимает эфир и рассматриваемые материальные тела за непрерывные среды, внутри которых для электромагнитных полей имеют силу характерные дифференциальные уравнения, к которым на поверхностях соприкосновения различных сред присоединяются еще определенные граничные условия. При таком представлении источник полей, наличествующих в данный момент, следует искать в конце концов именно в граничных условиях. Этому *феноменологическому* подходу издавна (с тех пор как существует математическая физика) противостоит глубокий, но математически более сложный *атомистический*. Согласно ему вещество или электричество состоят из очень маленьких отдельных частиц. Дифференциальные уравнения в частных производных описывают поведение этих частиц *в среднем*, однако есть множество явлений, где недостаточно рассматривать такие средние значения, и, напротив, требуется следить за частицами *по отдельности*.

Из этих двух подходов в продолжение 19 столетия на передний план развития науки выдвигался то один, то другой. В английской математической физике феноменологическое представление было господствующим от Грина (Green) до Максвелла. Однако, без сомнения, в своей душе Максвелл был атомистом. Прежде чем написать свой трактат, он всячески пытался придумать изощренный внутренний механизм, который мог бы служить субстратом тех электромагнитных явлений, которые мы наблюдаем как крупномасштабные. Напомним также его основополагающее рассмотрение теории газов. Когда Максвелл в своем трактате пользуется исключительно феноменологическим представлением, я усматриваю в этом сознательное самоограничение.

В самом деле, то атомистическое воззрение, которое в свое время Вильгельм Вебер (Wilhelm Weber) развил, допустив мгновенное взаимодействие мельчайших положительных и отрицательных частиц, Максвелл не смог бы никак взять за отправной пункт. Суть здесь в основном воззрении Максвелла, что электромагнитному воздействию нужно время для распространения. Следовательно, необходима среда — переносчик взаимодействия, «эфир».

Весьма примечательно, что дальнейшее развитие электричества не устранило противостояния феноменологии и атомизма, но навело мост между ними. С одной стороны, имеются атомарные носители электрического заряда, точнее, отрицательные электроны и положительные атомные ядра; с другой стороны, электромагнитное поле в свободном пространстве, опосредующее воздействие материальных носителей заряда друг на друга.

Исторический аспект теории мы можем здесь обрисовать лишь в общих чертах.

Как мы уже при случае упомянули в т. 1 (середина раздела о математической физике пятой главы), в 1882 Гельмгольц в своей Фарадеевской лекции ясно показал, что электрохимические факты приводят к заключению об атомистической структуре электричества. Подкреплением этой идеи служило и дальнейшее исследование явления катодных лучей (при электрическом разряде в трубках глубокого вакуума), открытого еще в 1869 Гитторфом (Hittorf). Математическое развитие электронной теории началось в Англии, однако на роль его предводителя все более стал выдвигаться голландский физик Г. А. Лоренц (H. A. Lorentz), чье имя осталось прочно связанным с этим развитием, особенно в освещаемых здесь нами аспектах. Как особенный исторический документ следует здесь назвать то ясное представление предмета, которое дал Вихерт (Wiechert) в мемориальном сочинении в честь Гаусса и Вебера (из-во Teubner) в 1899. (Вихерт был к этому тем более призван, что он нашел основные соотношения электронной теории первоначально независимо от Лоренца (несколько позже его), а в дальнейшем внес значительный вклад в ее развитие.) Как дополнение, содержащее и сведения о развитии данной теории на родине Максвелла, следует назвать книгу Лармора (Larmor) «Эфир и вещество» («Aether and Matter.» Cambridge, 1990).

Насколько могу видеть, все более распространяется идея, что носители электрических зарядов одновременно суть и последние строительные кирпичи вещества. Как уже упомянуто, есть, с одной стороны, положительно заряженные ядра атомов, концентрирующие в себе основную долю массы, и, с другой стороны, гораздо более легкие электроны[1], элементарные составные части отрицательного электричества. Протяженность атомов и электронов при этом, во всяком случае, исчезающе мала в сравнении с размерами атомов, т. е. расстояниями между отдельными частицами, так что образ атома сходен с планетной системой в миниатюре. Однако взаимодействие между электронами и ядрами явно не совсем точно следует предсказаниям классической электронной теории, так что последняя не полностью соответствует современному состоянию физических исследований[2]. Хотя в целом она дает очень хорошее описание электрических явлений, в атомарных масштабах остаются принципиальные расхождения в сравнении с математическим выражением теории Максвелла, расширенной посредством гипотезы об электронах. Это не

[1]Слово «электрон» впервые появилось у ирландского математика Стонея (Stoney) в докладе (R. Irish Transactions (2). 4. 1891). Его, очевидно, надо так понимать: мельчайшие заряженные частицы вещества, рассматриваемые в теории электролиза, называются, согласно Фарадею (Faradey) *ионами*, т. е. блуждающими частицами. Сообразно этому мельчайшие частицы, рассматриваемые в современном учении об электричестве, назвали электронионами, откуда потом в результате стягивания слова получилось «электроны».

[2]Ср. примечание 2 в конце главы. — *Прим. ред.*)

должно нас удерживать от того, чтобы опираться в дальнейшем изложении на классическую теорию Максвелла – Лоренца, т. е. в сущности на уравнения Максвелла. Позже мы пройдем в определенном направлении дальше с Эйнштейном[1]. Нужно, однако, отдавать себе отчет, что различные физические теории — это все время только приближения к действительному положению вещей и что долг математика — четко проследить любую определенную концепцию со всеми ее последствиями.

## § 5. О математической обработке теории Максвелла до начала 20 столетия

Представления Максвелла у нас, как и вообще на континенте, не могли долгое время по-настоящему укорениться, потому что слишком уж шли вразрез с традиционными установками, да и сам Трактат не представляет логически замкнутую систему, а развивается индуктивно от разных точек. И вот годами математическая обработка теории Максвелла оставалась, так сказать, делом только самих англичан. О Хевисайде мы уже не раз говорили. Рядом с ним следует ставить представителей кембриджской школы. Среди них я называю наряду с несколько более старым Пойнтингом (Poynting, род. 1852), прежде всего Дж. Дж. Томсона (J. J. Thomson) и Лармора (оба родились в 1857). Об «Эфире и веществе» Лармора выше ведь уже была речь.

Обрисованное положение тут же полностью переменилось, когда Герцу в 1887 г. удалось экспериментально зафиксировать постулированные Максвеллом электрические колебания в диэлектрике[2]. Теперь началось всестороннее обсуждение новых идей Максвелла. Герц сам был первый, кто дал им замкнутое выражение[3]. Сюда непосредственно примыкает Больцман, отметавший нерешительность всей силой своих воодушевленных выступлений (Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes 1891–93 — Лекции о Максвелловской теории электричества и света). Уравнения Максвелла для чистого эфира

---

[1]Это должно было бы случиться в четвертой главе данной книги, которую Клейн не успел завершить. Ср. Предисловие. — *Прим. ред.*

[2]Генрих Герц, год рождения снова 1857, был таким же блестящим экспериментатором, как и теоретиком; такая жалость, что исключительный талант должен был уйти от нас в возрасте 37 лет. Следует еще отметить особую заслугу Гельмгольца, что он вывел Герца на верную дорогу. Что касается развития Герца, ср. введение к т. 1 его Ges. Werke (1895, составитель Lenard) либо предисловие, которое сам Гельмгольц предпослал вышедшему еще в 1894 заключительному тему (который содержит механику Герца).

[3]Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik (Об основных уравнениях гидродинамики), часть I (для покоящихся тел) в Gött. Nachr. 1890, воспроизведено в Ann. d.Phys. u.Chemie N. F., Bd. 40, 1890; часть II (для движущихся тел) Bd. 41. 1890.

ему, как и Герцу, представляются предельно завершенным в своей простоте выражением физических событий. «Не божество ли начертало эти знаки?» — свободно цитирует и Гете. Далее следуют многие другие имена, привести которые мы не в состоянии. Но из французов мы должны назвать Пуанкаре (Poincaré). В конце восьмой главы т. 1 я уже уделил должное место этому выдающемуся математику, а в более поздних разделах этого цикла лекций[1] намерен вернуться к тому исключительному положению, которое он вообще занимает в новейшем развитии математики. Здесь же речь идет о том, что он в 1885–1896 занимал кафедру математической физики Парижского университета и прежде всего взялся там воплотить различные попеременно читаемые лекции в виде учебников и широко распространить с ними знание современной математической физики, дальнейшее развитие которой, таким образом, должно было подкрепляться мощью его математического умения. Трудно сказать, чему при этом следует больше удивляться: его всегда безотказной продуктивности или постоянно живой восприимчивости, позволявшей ему откликаться равным образом на любые вновь возникающие идеи физического плана и совершенствовать их формулировки.

Вождем в области этих новых идей мы, однако, считаем уже упомянутого выше голландца Г. А. Лоренца. Родившийся в 1853 в Арнхейме, Лоренц в стесненных обстоятельствах вырос как ученый в основном за счет самостоятельных занятий, испытывая все же побуждение от успешных молекулярно-теоретических работ ван дер Ваальса (van der Waals, род. 1837), которые возродили старую славу плантаторской Голландии выдающимся физическим исследованием. В 1872 мы застаем его учителем в маленькой вечерней школе родного города, в 1875 он получает ученую степень, в 1878 сменяет ван дер Ваальса на кафедре математической физики в Лейдене, а с 1912 он куратор института Тейлера в Гаарлеме, где он смог жить полностью своими творческими исследованиями. Когда в 1900 он отмечал 25-летие своей докторской степени, ученые всех наций внесли вклад в содержательный юбилейный сборник, вышедший как том 6 второй серии Archives Néerlandaises.

Лоренц исходит всегда из конкретного физического эксперимента, пытаясь понять его молекулярно-теоретически. В связи с этим его математика есть нечто обстоятельное, отличное от элегантности общего феноменологического описания. Встречаясь неоднократно с малыми величинами и пользуясь каждый раз степенными разложениями с ограничением членами низшей степени, он тем самым долгое время проходил мимо математической простоты преобразований, названных сейчас его именем. Тем убедительнее выставляет он в выгодном свете их общефи-

[1]Эти разделы Клейном не были написаны. — *Прим. ред.*

зическое значение (не только для сил электрического происхождения), оказываясь родоначальником представленных здесь релятивистских воззрений. Он сам сначала исходил постоянно из абсолютного, т. е. покоящегося эфира, внутри которого движутся туда и сюда частицы обычного вещества. Объяснить на основе этих представлений электрическое или оптическое поведение движущихся тел и было его первоначальной целью. Относящиеся сюда разработки Герца нельзя было признать удовлетворительными.

Главные публикации Лоренца, которые мы должны назвать в этой связи:

1. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants (Электромагнитная теория Максвелла и ее приложение к движущимся телам), 1892. Leyden. Archives Néerlandaises, Bd. 26.

2. Книга по-немецки: Versuch einer Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern (Опыт теории электрических и магнитных явлений в движущихся телах). Лейден 1895.

Желательно обратить внимание также на две большие статьи в Энциклопедии т. V часть 2, № 13, 14: Электромагнитная теория Максвелла; Дальнейшее развитие теории Максвелла: электронная теория.

## § 6. О постепенном развертывании группы Лоренца

Речь здесь должна пойти не об экспериментальных открытиях и измерениях, направляющих своим весомым словом идейное развитие — для этого можно было бы сослаться на широко распространенные изложения в книгах — но об истории математических формулировок. Насколько я в состоянии судить, существенные детали прогресса можно распределить по следующим этапам:

1. Фойгт: Über das Dopplersche Prinzip (О принципе Допплера). Göttinger Nachrichten 1887.

Уравнения Максвелла, сообразно установкам того времени, еще не принимаются во внимание, исследование начинается сразу с уравнений колебаний, в наших обозначениях это:

$$\Box X = 0, \quad \Box Y = 0 \quad \Box Z = 0, \tag{15}$$

с дополнительным условием

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{15'}$$

Раньше мы уже заметили, что каждое из уравнений $\Box = 0$ по отдельности переводится в себя посредством $\infty^7$ линейных подстановок

$x$, $y$, $z$, $t$ или $\infty^6$, если конкретизировать определитель подстановки $\pm 1$ (в последнем случае, при отвлечении от малосущественных дальнейших ограничений, как раз и получается то, чтó мы называли группой Лоренца). У Фойгта также в основе лежат $\infty^7$ подстановок, ограничения же по $\infty^6$ он достигает иначе, постулируя сразу для преобразований $t$ вид:

$$t' = t - (ax + by + cz). \tag{16}$$

Следовательно, у него только начало отсчета времени смещается в зависимости от $x$, $y$, $z$, масштаб же времени остается неизменным (что для автора оказывается существенным с принципиальных позиций). Далее следуют специальные случаи, когда удается удовлетворить дополнительному условию (15′) и первоначальному правилу (16) подбором подходящей зависимости $X$, $Y$, $Z$ от $x$, $y$, $z$.

2. Лоренц 1892 (смотри ссылку в конце предыдущего параграфа). Здесь на первом плане стоят уравнения Максвелла как таковые, преобразования $x$, $y$, $z$, $t$ распространяются также на $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$. Однако и здесь соблюдается правило (16); что это считается существенным, проявляется во введении особого термина для времени $t'$: «местное время». Как у Фойгта, отдается предпочтение специальному случаю поступательного перемещения вдоль оси $x$. Точные формулы подстановки для $x$, $y$, $z$, $t$ означают тогда:

$$x' = x - vt, \quad y' = y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad z' = z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad t' = t - \frac{vx}{c^2} \tag{17}$$

(под $v$ понимается скорость перемещения, под $c$ — скорость света). Выступающий здесь корень, как мы уже замечали, заменяется приближенным значением $1 - \dfrac{v^2}{2c^2}$, отчего мы имеем дело только еще с приближенной формулой.

3. Специальное преобразование (17) играет во всей литературе о группе Лоренца такую роль, что мы должны обсудить его несколько подробнее. Простейшее наблюдение подсказывает естественным образом ортогональный способ записи, с $l = ict$. Возьмем

$$\begin{aligned} x' &= \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot l \\ l' &= -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot l \end{aligned} \qquad y' = y, \quad z' = z, \tag{18}$$

но $U$, $V$, $W$, $L$, $M$, $N$ сообразно прежней условленности будут когредиентны минорам матрицы

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz & dl \\ \delta x & \delta y & \delta z & \delta l \end{vmatrix},$$

следовательно, $U' = U$, $L' = L$

$$\begin{aligned} V' &= \cos\varphi \cdot V + \sin\varphi \cdot N, \quad & W' &= \cos\varphi \cdot W - \sin\varphi \cdot M, \\ M' &= \cos\varphi \cdot M + \sin\varphi \cdot W, \quad & N' &= \cos\varphi \cdot N - \sin\varphi \cdot V. \end{aligned} \tag{18'}$$

Заменяем здесь $l$ на $ict$ и $U, V, W$ на $iX$, $iY$, $iZ$. Если мы желаем сохранить при этом вещественность коэффициентов подстановки, нужно оставить $\cos\varphi$ вещественным, а $i\sin\varphi$ сделать вещественным, приняв $\varphi = -iw$. Тогда прежние тригонометрические функции превращаются в гиперболические функции от $w$:

$$\cos(-iw) = \operatorname{ch} w, \quad i\sin(-iw) = \operatorname{sh} w$$
$$\operatorname{ch}^2 w - \operatorname{sh}^2 w = 1,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} x' &= \operatorname{ch} w \cdot x + c \operatorname{sh} w \cdot t \\ t' &= \frac{\operatorname{sh} w}{c} \cdot x + \operatorname{ch} w \cdot t \end{aligned}\right| \qquad y' = y, \quad z' = z \tag{19}$$

и соответственно,

$$\begin{aligned} &X' = X, \quad L' = L, \\ &Y' = \operatorname{ch} w \cdot Y - \operatorname{sh} w \cdot N, \quad Z' = \operatorname{ch} w \cdot Z - \operatorname{sh} w \cdot M, \\ &M' = \operatorname{sh} w \cdot Z + \operatorname{ch} w \cdot M, \quad N' = \operatorname{ch} w \cdot N - \operatorname{sh} w \cdot Y. \end{aligned} \tag{19'}$$

Пока, однако, среди физиков употребление гиперболических функций мало распространено[1]. Желательно поэтому, понимая под $q$ правильную дробь, сделать следующую замену:

$$\operatorname{ch} w = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \operatorname{sh} w = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Тогда получается:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x + cqt}{\sqrt{1-q^2}} \\ t' &= \frac{\dfrac{q \cdot x}{c} + t}{\sqrt{1-q^2}} \end{aligned}\right| \qquad \begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{20}$$

или соответственно,

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= (Y - qN) : \sqrt{1-q^2}, \quad & M' &= (M + qZ) : \sqrt{1-q^2}, \\ Z' &= (Z + qM) : \sqrt{1-q^2}, \quad & N' &= (N - qY) : \sqrt{1-q^2}. \end{aligned} \tag{20'}$$

[1] К современным физикам-теоретикам это не относится. — *Прим. ред.*

Теперь, если положить $\frac{v}{c} = q$, (20) отличаются от (17) только своей нормировкой на определитель +1, равенства же (20′) образуют необходимое дополнение для инвариантности уравнений Максвелла.

В дальнейшем мы будем называть (20), (20′) кратко *специальным преобразованием Лоренца*.

4. Правда, не Лоренц вывел эти формулы впервые, а Лармор: ср. с. 167, 174, 176–177 его книги 1900 г., уже упомянутой здесь на с. 85: «Эфир и вещество». Он их использует, точно так же, как и все последующие авторы, чтобы связать некую систему, поступательно движущуюся вдоль оси $x$ (с постоянной скоростью $v$), с покоящейся системой, для которой известно решение уравнений Максвелла, переносимое затем обратно на движущуюся систему. Соответствующие выкладки Лармора, однако, мало привлекли внимания. Напротив, бурное дальнейшее развитие, о котором мы теперь собираемся рассказать, началось только тогда, когда этот комплекс формул (который у Лармора несколько затерян между другими вещами) нашел повторно со своей стороны Лоренц (см. издание: Verlag der Amsterdamer Akagemie Bd. 12, 1904, S. 986–1009). Мы упоминали выше в пункте 2, что уже в 1892 г. он был достаточно близок к этому. Стало быть, есть все же доводы, чтобы связывать систему равенств (20), (20′) исключительно с его именем.

5. И вот пришел 1905 год с решающими публикациями Пуанкаре и Эйнштейна (Einstein), которые шли рядом независимыми путями, несмотря на то, что они оба говорили о «постулате» или «принципе» относительности.

Пуанкаре положил начало заметкой «Sur la dynamique de l'électron» «О динамике электрона» в Comptes Rendus Парижской академии от 5 июня, которая затем уже как расширенная статья была представлена в Circolo Matematico in Palermo 23 июня, но вышла только в 1906 (под тем же названием, Palermo Rend., vol. 21).

Однако работа Эйнштейна «Zur Elektrodynamik bewegter Körper» («К электродинамике движущихся тел») была вручена редакции Annalen der Physik 30 июня, а опубликована там 26 сентября в (4) Bd. 17[1].

Очень интересно сравнить конкурировавшие таким образом публикации — у Пуанкаре более отчетливо выступает математический аппарат: он замечает, что преобразования Лоренца в совокупности образуют группу (для которой он тогда закрепил наименование группы Лоренца); он уже использует при случае упрощение, которое возникает, если четвертую переменную выбирают как $ict$ и т. д. Он пытается приспосо-

---

[1]Основополагающие работы Пуанкаре и Эйнштейна не раз переиздавались. См. на русском языке: А. Пуанкаре. Избр. труды, т. 3.

А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. 1. М. Наука, 1965: Принцип относительности. М. Атомиздат, 1973 и др.

бить к теории инвариантов («теории относительности») группы Лоренца прежде всего проблемы небесной механики, следовательно, учение о тяготении, причем оказывается, что отклонения от классической теории выражаются только членами порядка $v^2/c^2$, где под $v$ понимается скорость тел, выбранных для рассмотрения. Классическая теория выглядит просто как предельный случай новой теории при $c = \infty$. Мы далее еще вернемся к обстоятельному рассмотрению этих вопросов. — У Эйнштейна зато выступает на первый план натурфилософское мышление. Он замечает, что в преобразованиях Лоренца содержится совершенно новое понятие времени. Нет одновременности двух событий вообще, таковая существует только по отношению к какой-нибудь из бесконечно многих равноправно выбираемых систем координат. Доверие к значению математики для внешнего мира у молодого исследователя простирается достаточно далеко для предсказания, что часы, которые движутся (следовательно, это может быть и счетчик колебаний движущегося источника света), измеряют для наблюдателя, покоящегося в системе $x$, $y$, $z$, $t$, не (выражаясь математически)

$$\int dt,$$

а

$$\int \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}},$$

они, следовательно, идут с точки зрения покоящегося наблюдателя тем медленнее, чем больше величина[1]

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2.$$

---

[1]Эйнштейн родился в 1879 году в Ульме. Его школьное образование было нерегулярным, отчасти в Швейцарии и в Италии. Высшее образование он получил в Цюрихе, где заслужил ученую степень за работу о внутреннем трении в газах, чтобы потом занять незначительную должность в патентном бюро в Берне. Именно здесь он написал свою работу 1905 г., которая способствовала его аттестации в Берне, а вскоре экстраординатуре в Цюрихском университете. В 1911 он ординарный профессор в Праге, в 1912 в политехникуме в Цюрихе. С 1914 он освобожденный академик в Берлине. Эйнштейн еврейского происхождения, как Герц и Минковский. Удивительно, как здесь снова изначальный талант развивается без регулярной школы, совсем по-другому, чем Пуанкаре, который прошел точно определенный французский путь обучения к высшему образованию, включающему Политехническую Школу. В связи с этим математическая подготовка Эйнштейна первоначально была лишь незначительной; он только постепенно расширял ее в общении с другими математиками. Зато нерегулярное образование сохранило ему оригинальность собственных размышлений. Не стало ли это для него неким веским преимуществом?

Дальнейшие важные факты биографии: 1921 — Нобелевская премия по физике; 1924 — разработка квантовой статистики частиц с целочисленным спинам (совместно с Бозе); 1933 — при растущей фашистской угрозе эмиграция из Европы в США. Стимулировал создание атомного оружия. Скончался в 1955 в Принстоне (США). Научно-биографическая литература об Эйнштейне и его исследованиях огромна. — *Прим. перев.*

6. Наконец, годы 1907/1908 с подытоживающими работами Минковского. Прежде всего, среди них есть две, публикацию которых выполнил он еще сам[1]:

a) Основные уравнения электромагнитных процессов в движущихся телах (Gött Nachr. 1908, представлено 21 дек. 1907 = Сочинения, т. 2).

b) Пространство и время (Доклад на собрании естествоиспытателей в Кельне 21 сент. 1908). Сочинения, т. 2.

К ним примыкает изданная Борном статья из научного наследия, в т. 2 Собрания сочинений:

c) Вывод основных уравнений ... с (точки зрения электронной теории сперва в Bd. 68 Math. Annalen 1910).

Однако потом уже в 1915, найденная в его бумагах, была опубликована рукопись доклада, который он сделал 5 ноября 1907 в нашем Геттигенском математическом обществе:

d) Принцип относительности (Ann. d.Phys. (4), 47 или Jahresberichte der Deutschen Mathematikvereinigung 24). представление в d) для меня — самое излюбленное из всех. Здесь Минковский, обращаясь к коллегам-специалистам, высказывает без утайки свои глубинные, в особенности инвариантно-теоретические идеи, в то время как, например, в a), чтобы не возникало необходимости предполагать специфические предварительные знания у читателей, он выбирает безжизненное представление посредством притягиваемого ad hoc исчисления матриц, внешние подробности которого доступны на элементарном уровне, но не доступна суть выводов.

У Минковского присутствует та и другая сторона: наряду с полным господством математического аппарата теории относительности группы Лоренца выражено лапидарными фразами ее натурфилософское значение. В первую очередь надо здесь заметить, в связи с нашим собственным изложением в предыдущих параграфах, что только Минковский явственно опознал истинную природу $X, Y, Z, L, M, N$ как компонентов 6-тензоров и этим завершил понимание внутренней структуры уравнений Максвелла[2]. На плодотворные идеи Минковского полностью опирается наше дальнейшее изложение, впрочем, в сравнении с их современным представлением мы вынуждены ограничиться начальными элементарными вещами.

В отношении внешней формы мы тут во многом примыкаем к очень популярным среди немецких физиков (уже цитированным на стр. 56)

[1]Минковский скончался 12 января 1909 от последствий операции в возрасте всего 44 лет.

[2]К сожалению, Минковский в *a*) для того, что мы здесь называем 6-тензором, берет бесцветное слово «вектор второго вида». Напротив, в *d*) он для этого предлагает новое наименование «трактор», вполне целесообразное согласно моей интуиции (Клейн, конечно, не прав — это название не прижилось). — *Прим. перев.*

комментариям Зоммерфельда 1910: К теории относительности, Часть 1: Четырехмерная векторная алгебра. Ann. d. Phys. (4), 32; Часть 2: Четырехмерный векторный анализ, там же, 33. Однако геометрическим аналогиям, с которыми работает Зоммерфельд, мы предпочитаем уже привычные нам инвариантно-теоретические расчеты и комплексы понятий. Сходное уже сделано у фон Лауэ в его учебнике «Das Relativitätsprinzip» (Принцип относительности), т. 1, Брауншвейг, 1911, 2-е издание 1913[1], однако кое-что я, надеюсь, смогу изложить точнее и проще. Эта большая простота достигается в особенности за счет отказа от обсуждения существующих экспериментов с перетолкованием их первоначально трехмерного видения на языке четырехмерия, так что я, напротив, сразу дедуктивно подготавливаю четырехмерное мышление. Подобным же образом, как известно, удобнее сразу развить систему мира по Копернику, чем подниматься к ней от геоцентрических наблюдений путем, проходящим через представления Птолемея. Но, конечно, остается некоторая половинчатость у астронома, который довольствуется коперниканским мировоззрением *in abstracto* и не утруждает себя детальным продумыванием его точной связи с геоцентрическими наблюдениями.

## § 7. О дальнейшем распространении новой доктрины. Развитие после 1911 или 1909

«Новой доктриной» здесь следует называть воззрение, что релятивизм группы Галилея – Ньютона во всех областях физики должен быть заменен релятивистской теорией группы Лоренца.

Большинство физиков, если вообще присоединялось к этой доктрине, то лишь замедленно, чтó психологически понять легко. Кто десятилетиями формировал в себе определенный способ мысли, не может вдруг перестроиться. Во всяком случае он будет снова и снова пытаться освоить новые формулировки на путях, идущих через его прежние разработки, чтó и приводит ко всяческим трудностям. Так получилось, в частности, и с самим Лоренцом. Совсем другое — молодое поколение. Многое, чтó выглядело в электродинамике сложным, вдруг стало простым; к таким вещам мы еще много раз будем возвращаться, называя соответствующие имена. И энтузиасты разными путями устремились вперед. Среди принципиальных продвижений я хочу указать, что еще в 1907 Планку (Planck) удалось[2] связать термодинамическое учение с

---

[1]В т. 2 (соответственно, 1921 и 1923) обсуждается общая теория относительности. — *Прим. ред.*

[2]Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1907 = Ann. d.Phys. (4), Bd. 26 (1908).

новым воззрением, а в 1911 Герглоц представил[1] законченным образом механику деформируемого тела, в которую до этого некоторый вклад внес Минковский.

Однако это такие вещи, которых мы можем касаться только мимоходом. Для нас важнее констатировать и объяснить, как к новому движению тотчас примкнули в большом числе математики. С одной стороны, по этому поводу можно сказать, что тот, кто прошел школу неевклидовой геометрии, был заранее предрасположен, едва возникло такое побуждение, заменить группу Галилея – Ньютона группой Лоренца, предельным случаем которой первая является. В этом направлении как раз не действует внутреннее сопротивление. Но было еще гораздо важнее, что новые последовательности идей, понадобившиеся теперь, математики, хотя бы в новой форме, бессознательно, уже носили готовыми в себе как результат своих инвариантно-теоретических (или геометрических) исследований. Никто не почувствовал это живее и не оценил весомее возникающее положение вещей, нежели сам Минковский, когда он в своем докладе Геттингенскому математическому обществу, упомянутом выше в пункте d), для начала выразился следующим образом:

«Математик особенно хорошо предрасположен воспринимать новые воззрения, потому что при этом речь идет о приспособлении к таким комплексам понятий, которые ему давно были очень даже привычны, в то время как физик должен изобретать эти понятия отчасти вновь и при этом усердно пробивать себе тропу через дремучий лес неясностей, хотя совсем рядом выводит нас вперед отличная дорога, давно проложенная математиком. Вообще новые разработки, в случае, если они в самом деле вернó отображают явления, означают чуть ли не наивысший триумф, которого когда-либо достигало применение математики. Речь идет о том — при возможно кратком выражении — что наш мир в пространстве и времени представляет собой в известном смысле четырехмерное неевклидово многообразие. Кажется, становится ясным, к славе математиков и к безграничному удивлению остального человечества, что математики чисто своей фантазией создали большую область, которой однажды должно выпасть вполне реальное существование, хотя бы оно и не было целью этих мастеров идеала.»

В связи с этим словами Минковского я хочу обратить внимание, что они также характеризуют тогдашнее состояние мнений и предпосылки для сформировавшихся сейчас представлений. Но за теми же словами видится и нечто идущее еще дальше. Следуя идеям, раскрывшимся благодаря богатой содержанием статье Эйнштейна 1911, мы рассчиты-

[1] Ann.d.Phys. (4), Bd. 36 (1911).

ваем высказать мнение по поводу соответствующих физических разработок, если представится такой случай в последующих частях лекций[1]. Эйнштейн, пытаясь найти формализм, который сделал бы возможным включить учение о гравитации в единую схему с электромагнитными явлениями, стихийно пришел к мысли заменить теорию относительности группы Лоренца, следовательно, некоторой линейной группы с конечным числом параметров, на теорию относительности группы всевозможных точечных преобразований, следовательно, бесконечной непрерывной группы согласно терминологии Ли. Чтобы это можно было надлежащим образом понять, мы должны начинать издалека и особенно задуматься над глубокими идеями, которые развил Риман в своей лекции на право преподавания в 1854 «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen» («О гипотезах, лежащих в основании геометрии»). В т. 1 уже подчеркивалось, что Риман при этом существенно руководился натурфилософскими интересами.

В остальном я желаю отметить еще один шаг в освещаемом нами направлении, сделанный в 1909 с математической стороны. Получается так, что снова надо привязываться к Эрлангенской программе. При рассмотрении евклидовой группы с 6 параметрами в $R_3$ там было сформулировано заключение о существовании расширенной группы, которая возникает при добавлении преобразования обратных радиусов. Это группа $\mathcal{G}_{10}$, которую я позже назвал просто конформной группой, потому что она (как по сути дела установил еще Лиувилль (Liouville) еще в 1845) совпадает с совокупностью тех преобразований пространства, которые переводят сумму $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ в ее произведение на какой-либо множитель. Притом эту группу можно записать как однородную и линейную, именно, приняв

$$x = \frac{\xi}{w}, \quad y = \frac{\eta}{w}, \quad z = \frac{\zeta}{w}$$

и

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\varrho}{w}:$$

тогда она образуется теми однородными линейными подстановками 5 переменных $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\varrho$, $w$, которые переводят в себя квадратичное равенство

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \varrho w = 0.$$

Все это переносится на $n$ измерений, и возникает конформная груп-

[1]Сравни с. 85, прим. 7. — *Прим. ред.*

па $G_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, следовательно, в $R_4$ это будет $G_{15}$.[1] С другой стороны, В. Томсон (W. Thomson) в своей известной первой работе (1845) доказал и широко использовал, что из каждой потенциальной функции $V(x, y, z)$ в $R_3$, т. е. такой, которая удовлетворяет уравнению $\Delta = 0$, инверсией по отношению к началу координат и делением на $r$ можно получить новую потенциальную функцию, именно,

$$\frac{1}{r}V\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right).$$

Данный факт тоже можно несложной модификацией перенести на пространства произвольной размерности, привлекая при этом соответствующую конформную группу; для уточнения положения вещей я рекомендую книги Покелса (Pockels)[2] и Бохера (Bôcher)[3]. Здесь надо держать в памяти тесную связь уравнений Максвелла с теорией потенциала четырехмерного пространства (которая дается уравнением $\Box = 0$) при подстановке $l$ вместо $ict$. Тогда сам собой напрашивается вопрос, не могут ли уравнения Максвелла переходить в себя при достаточно искусном применении конформных преобразований $x$, $y$, $z$, $t$. Тем не менее никто, кажется, не думал о такой возможности, пока она не была в 1909 в полном объеме подтверждена английскими математиками Каннингхемом (Cunningham) и Бейтменом (Bateman); в особенности Бейтмен дал ей интересное инвариантно-теоретическое развитие (смотри Proceedings of the London Mathematical Society (2), VIII, 1910 etc.). Величины $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$ при каждом конкретном конформном преобразовании $R_4$ сами претерпевают линейную подстановку, коэффициенты которой не постоянны, а представляют собой определенные простые функции от $x$, $y$, $z$, $t$.

Итак, значимость методов теории относительности для уравнений Максвелла простирается значительно дальше, чем просто использование группы Лоренца. Та удивительная гармония, которая существует между прежним развитием чистой математики и идейными конструкциями новой физики, вновь оправдывает себя и в расширенной области. Примечательно, что эти исследования по крайней мере в Германии мало

---

[1]Этими вещами Дарбу (Darboux), Ли и я сам много занимались в 1869–1872 годах; см., например, резюмирующее изложение в моих «Лекциях по высшей геометрии», часть 1.

[2]Über die partielle Differentialgleichang $\Delta U + k^2U = 0$ und ihr Auftreten in der mathematischen Physik (О дифференциальном уравнении $\Delta U + k^2U = 0$ и его роли в математической физике). Лейпциг, 1891.

[3]Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie (О разложении в ряд в теории потенциала). Лейпциг, 1894.

привлекали к себе внимания, и в дальнейшем при случае нам мало на что можно будет ссылаться.

# II. Рассмотрение группы Лоренца в ортогональной форме

Наше дальнейшее обсуждение теории относительности группы Лоренца само собой расчленяется на две части. Сначала выставляем на первый план внутреннюю симметричность построений, для чего употребляем ортогональный способ записи подстановок $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ и т. д. как исходных переменных соответственно § 2 предыдущей части. Затем учтем особые условия вещественности группы Лоренца. Это разделение, при всем желании избежать повторений, нецелесообразно доводить до конца, но в общем оно будет все же характерно для последующих разделов II и III.

## § 1. Необходимые элементы четырехмерного анализа

1. Координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ (или также $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ и т. д.) точек четырехмерного «мира», в котором группа Лоренца представлена совокупностью $\infty^{10}$ таких неоднородных линейных подстановок

$$x_i' = \alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i x_3 + \varepsilon_i x_4 + \zeta_i \quad (i = 1, \ldots, 4), \tag{1}$$

в которых $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\varepsilon_i$ образуют ортогональную матрицу с определителем 1.

2. 4-векторы, т. е. комплексы 4 величин, претерпевающих однородные подстановки, для которых сохраняется представление (1) с вычеркнутыми $\zeta_i$. Простые примеры дают разности двух наборов точечных координат

$$x_1 - y_1, \quad x_2 - y_2, \quad x_3 - y_3, \quad x_4 - y_4$$

и в особенности дифференциалы

$$dx_1, \quad dx_2, \quad dx_3, \quad dx_4;$$

точно так же, как операторы частного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_4},$$

поскольку при ортогональных подстановках различие когредиентности и контрагредиентности исчезает.

В дальнейшем мы будем иметь дело не только с отдельными векторами, но и с векторными полями. Вообще 4-векторы, не обязательно сводящиеся к набору координат точки, обозначаем как

$$u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4 \quad \text{или} \quad v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4 \text{ и т. д.} \tag{2}$$

Простейшие скаляры, появляющиеся в векторном анализе, представляют собой квадратичные формы

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \quad \text{или} \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \tag{3}$$

и соответствующие поляры

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4. \tag{4}$$

Как просто о специальном случае (4), для векторного поля $u(x)$ можно теперь говорить о *большой дивергенции*

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = \operatorname{div}(u); \tag{5}$$

прилагательное «большой», которое мы употребляем вслед за Зоммерфельдом, должно здесь и в других, сходных случаях напоминать, что мы имеем дело не с тремя, а с четырьмя переменными.

3. Пусть $f(x)$ означает какой-нибудь скаляр, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_3},\quad \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

образуют 4-вектор, *большой градиент* $f$. Из него вновь строятся скаляры, с одной стороны,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^2,$$

с другой стороны,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2},$$

причем последний мы, как и раньше, обозначаем

$$\Box f. \tag{6}$$

4. 6-тензоры, т. е. комплексы по 6 величин $\lambda_{ik}$ (или также $\mu_{ik}$), которые подвергаются подстановкам, как миноры $p_{ik}$ (или $q_{ik}$) двухстрочной матрицы, составленной из 4-векторов

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}.$$

Для набора $\lambda_{ik}$ существует *два инварианта*

$$\begin{cases} \Lambda = \lambda_{14}\lambda_{23} + \lambda_{24}\lambda_{31} + \lambda_{34}\lambda_{12} \\ \Omega = \sum \lambda_{ik}^2 \end{cases} \tag{7}$$

«Дуальные» $\mu_{ik}$ обозримее всего получаются из равенств

$$\mu_{ik} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_{ik}}, \tag{8}$$

с которыми $\Lambda$ можно придать вид:

$$M = \mu_{14}\mu_{23} + \mu_{24}\mu_{31} + \mu_{34}\mu_{12}. \tag{9}$$

Также получается и наоборот:

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial M}{\partial\mu_{ik}}. \tag{10}$$

Между прочим, мы снова будем при необходимости принимать в расчетах:

$$\lambda_{ik} = -\lambda_{ik}, \quad \lambda_{ii} = 0 \tag{11}$$

(и точно так же для $\mu_{ik}$). Естественно, мы особо выделяем индекс 4.

5. Далее важен специальный 6-тензор, выводящийся — на основе произвольного 4-вектора $u$ — из матрицы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix},$$

именно:

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \tag{12}$$

Мы называем его $\mathrm{Rot}\,u$, *большим ротором* векторного поля $(u)$.

Из координат $\lambda_{ik}$ или $\mu_{ik}$ произвольного 6-тензора и координат произвольного 4-вектора $u_i$ можно составить, как уже было упомянуто в I, § 2, два новых 4-вектора по следующей простой схеме:

$$v_i = \sum_k \lambda_{ik} u_k \quad \text{или} \quad v'_i = \sum_l \mu_{ik} u_k. \tag{13}$$

6. Давая здесь все же кое-что новое, заметим, что из координат $\lambda_{ik}$ двояким способом можно образовать тройки величин, называемые нами 3-*тензорами*.

Именно, берем два скаляра

$$\Omega \pm 2\Lambda,$$

это тернарные инварианты

$$(\lambda_{14} \pm \lambda_{23})^2 + (\lambda_{24} \pm \lambda_{31})^2 + (\lambda_{34} \pm \lambda_{12})^2,$$

и можно по их виду понять, что две тройки величин

$$\begin{matrix} & \lambda_{14} + \lambda_{23}, & \lambda_{24} + \lambda_{31}, & \lambda_{34} + \lambda_{12} \\ \text{и} & & & \\ & \lambda_{14} - \lambda_{23}, & \lambda_{24} - \lambda_{31}, & \lambda_{34} - \lambda_{12} \end{matrix} \tag{14}$$

испытывают свои ортогональные (не когредиентно друг другу) подстановки: к подробностям мы еще вернемся в § 2. Здесь следует напомнить исходное электромагнитное истолкование $\lambda_{ik}$. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{23} &= L, & \lambda_{31} &= M, & \lambda_{12} &= N, \\ \lambda_{14} &= iX, & \lambda_{24} &= iY, & \lambda_{34} &= iZ. \end{aligned}$$

Образовав тройки (14), мы пришли, следовательно, к комплексным комбинациям

$$L \pm iX, \quad M \pm iY, \quad N \pm iZ, \tag{15}$$

которые разные авторы уже часто использовали при анализе уравнений Максвелла, хотя принцип их составления выступает только здесь.

7. Наконец, 10-*тензоры*, уже упоминавшиеся выше (гл. 1 **В**, § 4). Отправляемся от совокупности коэффициентов $a_{ik}$ квадратичной формы, составляемой из координат какого-либо 4-вектора, эти коэффициенты при действии группы Лоренца должны испытывать такие подстановки, чтобы значение

$$\sum a_{ik}\, u_i\, u_k \tag{16}$$

оставалось постоянным. В указанном месте упоминался и специальный 10-тензор с коэффициентами

$$\delta_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \quad \delta_{ii} = 1.$$

8. Простой способ вывести 10-тензор из 6-тензора. Если по типу (13) написать

$$v_i = \sum_k \lambda_{ik}\, u_k,$$

то получаем новый 4-вектор, а если повторить ту же подстановку, то

$$w_h = \sum_i \lambda_{hi}\, v_i.$$

Собрав это вместе, получаем

$$w_h = \sum_i \sum_k \lambda_{hi}\, \lambda_{ik}\, u_k,$$

и в результате выделения коэффициентов, симметричных, как оказывается, по отношению к главной диагонали, имеем 10-тензор*.

Полезно подробно выписать матрицу этих коэффициентов. При подходящей нумерации индексов она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{12}^2-\lambda_{13}^2-\lambda_{14}^2 & \lambda_{13}\lambda_{32}+\lambda_{14}\lambda_{42} & \lambda_{14}\lambda_{43}+\lambda_{12}\lambda_{23} & \lambda_{12}\lambda_{24}+\lambda_{13}\lambda_{34} \\ \lambda_{23}\lambda_{31}+\lambda_{24}\lambda_{41} & -\lambda_{23}^2-\lambda_{24}^2-\lambda_{21}^2 & \lambda_{24}\lambda_{43}+\lambda_{21}\lambda_{13} & \lambda_{21}\lambda_{14}+\lambda_{23}\lambda_{34} \\ \lambda_{32}\lambda_{21}+\lambda_{34}\lambda_{41} & \lambda_{34}\lambda_{42}+\lambda_{31}\lambda_{12} & -\lambda_{34}^2-\lambda_{31}^2-\lambda_{32}^2 & \lambda_{31}\lambda_{14}+\lambda_{32}\lambda_{24} \\ \lambda_{42}\lambda_{21}+\lambda_{43}\lambda_{31} & \lambda_{43}\lambda_{32}+\lambda_{41}\lambda_{12} & \lambda_{41}\lambda_{13}+\lambda_{42}\lambda_{23} & -\lambda_{41}^2-\lambda_{42}^2-\lambda_{43}^2 \end{pmatrix}.$$

Добавив здесь всюду $\frac{1}{2}\delta_{ik}\cdot\Omega$, получаем другую матрицу*, которая играет важную роль при исследованиях электромагнитного поля в терминах $\lambda_{ik}$ и заслуживает поэтому специального обозначения $F$:

$$F = \begin{pmatrix} F_{1234} & - & - & - \\ - & F_{2341} & - & - \\ - & - & F_{3412} & - \\ - & - & - & F_{4123} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad F_{ijkl} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{ij}^2 & +\lambda_{ik}^2 + \lambda_{il}^2 \\ -\lambda_{kl}^2 & -\lambda_{lj}^2 - \lambda_{jk}^2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Элемент в правом нижнем углу, если его еще поделить на $c^2$ и переписать с помощью величин $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$, приобретает форму:

$$\frac{1}{2c^2}(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2).$$

Это выражение физики имеют обыкновение называть удельной (на единицу объема) энергией электромагнитного поля. Отсюда особый интерес, проявляемый к 10-тензору $F$, так что иной раз его называют прямо-таки «мировым тензором». Удельная энергия, следовательно, не инвариантна сама по себе, она только представляет собой один из компонентов 10-тензора. К физическому истолкованию остальных компонентов мы вернемся позже.

9. Вообще из компонентов $a_{ik}$ 10-вектора и координат $u_k$ 4-вектора строится новый 4-вектор в форме

$$\sum_k a_{ik}\,u_k; \quad i=1,2,3,4.$$

Опять находим специальный случай

$$\sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \quad (i=1,\,\ldots,\,4). \tag{18}$$

Этот вектор Зоммерфельд называет векторной дивергенцией 10-тензора $a_{ik}$. Для электромагнитного тензора $F$ она тождественно исчезает в силу уравнений Максвелла (как можно усмотреть в процессе составления $F$ или провести нужные выкладки по готовому результату). Этого мы коснемся также в § 6.

## § 2. Новое подключение кватернионов

Построения предыдущего параграфа по сути целиком опираются на большую работу Минковского 1907/1908. Минковский там мимоходом упоминает также, что формализм кватернионов мог бы оказаться полезным, но лично ему кажется слишком тяжеловесным. Я, напротив, берусь показать, как просто могут работать основные формулы теории кватернионов.

Еще в гл. 1 **B** § 3 было показано, как можно представить с помощью кватернионов общие ортогональные подстановки с единичным определителем для 4 и для 3 переменных. Сейчас надо только приспособиться к иным обозначениям. Сперва напишем 4-вектор $(u)$ как кватернион:

$$(u) = iu_1 + ju_2 + ku_3 + u_4.$$

Далее обозначаем сумму квадратов $a^2+b^2+c^2+d^2$ коэффициентов кватерниона $q = ia + jb + kc + d$ как $Nq$, т. е. норму $q$. Тогда для записи наиболее общей унимодулярной подстановки, т. е. для общей подстановки Лоренца в ортогональной форме применительно к 4-вектору $(u)$, прибегаем к конструкции:

$$(\overline{u}) = \frac{q \cdot (u) \cdot q'}{\sqrt{Nq \cdot Nq'}}. \tag{1}$$

Здесь $q$, $q'$ — два произвольных кватерниона. Если же принять в частности $q' = q^{-1}$, то $Nq \cdot Nq' = 1$, $\overline{u}_4 = u_4$ и в оставшейся формуле

$$(i\overline{u}_1 + j\overline{u}_2 + k\overline{u}_3) = q(iu_1 + ju_2 + ku_3)q^{-1} \tag{2}$$

мы видим наиболее общую унимодулярную подстановку 3 переменных $u_1$, $u_2$, $u_3$.

Однако в предыдущем параграфе вводились 3-тензоры, т. е. такие комплексы, которые при выполнении ортогональных подстановок (1) над $u$ в четырехмерном пространстве сами претерпевают трехмерные ортогональные подстановки. Эти подстановки должны как-то входить в сферу действия правила (2). Конкретно, в предположении справедливости формулы (1), для 3-тензора

$$\lambda_{14} + \lambda_{23}, \quad \lambda_{24} + \lambda_{31}, \quad \lambda_{34} + \lambda_{12}$$

имеет место подстановка

$$\begin{aligned} i\big(\overline{\lambda}_{14} + \overline{\lambda}_{23}\big) + j\big(\overline{\lambda}_{24} + \overline{\lambda}_{31}\big) + k\big(\overline{\lambda}_{34} + \overline{\lambda}_{12}\big) &= \\ = q'^{-1}\big(i(\lambda_{14} + \lambda_{23}) + j(\lambda_{24} + \lambda_{31}) + k(\lambda_{34} + \lambda_{12})\big)q', \end{aligned} \tag{3}$$

из которой совсем выпадает $q$, а для другого 3-тензора

$$\lambda_{14} - \lambda_{23}, \quad \lambda_{24} - \lambda_{31}, \quad \lambda_{34} - \lambda_{12}$$

подстановка аналогичного вида

$$\begin{aligned} i\big(\overline{\lambda}_{14} - \overline{\lambda}_{23}\big) + j\big(\overline{\lambda}_{24} - \overline{\lambda}_{31}\big) + k\big(\overline{\lambda}_{34} - \overline{\lambda}_{12}\big) &= \\ = q\big(i(\lambda_{14} - \lambda_{23}) + j(\lambda_{24} - \lambda_{31}) + k(\lambda_{34} - \lambda_{12})\big)q^{-1}. \end{aligned} \tag{3'}$$

Очевидно, и подстановки, индуцируемые (1) для самих $\lambda$, также выражаются после этого достаточно просто.

Но сжатый способ записи распространяется и на уравнения Максвелла. Для этого только надо образовать оператор:

$$i\frac{\partial}{\partial x_1}+j\frac{\partial}{\partial x_2}+k\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}=\Diamond. \tag{4}$$

Тогда оба подсемейства уравнений Максвелла, как подтверждается проверкой, записываются следующим простым образом:

$$\begin{cases}\text{I.} & \Diamond\bigl(i(\lambda_{14}+\lambda_{23})+j(\lambda_{24}+\lambda_{31})+k(\lambda_{34}+\lambda_{12})\bigr)=0\\ \text{II.} & \bigl(i(\lambda_{14}-\lambda_{23})+j(\lambda_{24}-\lambda_{31})+k(\lambda_{34}-\lambda_{12})\bigr)\Diamond=0.\end{cases} \tag{5}$$

Если же нужно только доказательство, что эти уравнения инвариантны по отношению к подстановкам (3) и (2) в связи с (1), дело обходится без длинных пересчетов. По соображениям симметрии, достаточно рассмотреть один случай, когда в (1) мы принимаем во внимание множитель $\dfrac{q}{\sqrt{Nq}}$, но полагаем $q'=1$. Тогда уравнения I остаются неизменными потому, что указанный множитель $\dfrac{q}{\sqrt{Nq}}$ встает перед оператором $\Diamond$, последующий же сомножитель $i(\lambda_{14}+\lambda_{23})+\ldots$ вообще никак не меняется. Уравнения же II принимают сперва вид:

$$q\bigl(i(\lambda_{14}-\lambda_{23})+j(\lambda_{24}-\lambda_{31})+k(\lambda_{34}-\lambda_{12})\bigr)\,\overbrace{q^{-1}\frac{q}{\sqrt{Nq}}}\,\Diamond=0,$$

и два сомножителя, объединенные здесь сверху скобкой (объединение возможно согласно ассоциативному закону для умножения кватернионов) взаимно сокращаются с точностью до допускающего отбрасывание скалярного $N(q)$, только в начале формулы остается множитель $q$, также не нарушающий справедливость равенства.

Формула I допускает еще некоторое обобщение, полезное нам в дальнейшем. В знаменателе (1) стоит квадратный корень

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)}.$$

Мы хотим добиться рационального представления и для этого сперва принимаем

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a'^2+b'^2+c'^2+d'^2, \tag{6}$$

что очевидно, на самом деле не вносит ограничения, а дальше для выявления рациональных зависимостей полагаем с некоторой внешней потерей симметрии

$$\begin{gathered}\frac{a-a'}{2}=A_1,\quad \frac{b-b'}{2}=B_1,\quad \frac{c-c'}{2}=C_1,\quad \frac{d+d'}{2}=D_1,\\ \frac{a+a'}{2}=A_2,\quad \frac{b+b'}{2}=B_2,\quad \frac{c+c'}{2}=C_2,\quad \frac{d-d'}{2}=D_2.\end{gathered}\tag{7}$$

Тогда, в соответствии с (6),

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2+D_1D_2=0,\tag{8}$$

так что в самом деле любую из этих 8 величин можно выражать рационально через 7 остальных. Но если бы мы это действительно выполнили, симметрия совсем бы исчезла. Мы сохраняем поэтому все 8 величин $A_1, \ldots, D_2$, но требуем соблюдения связи (8) между ними. Однако, если мы вводим

$$\begin{gathered}i\,A_1+j\,B_1+k\,C_1+D_1=Q_1,\\ i\,A_2+j\,B_2+k\,C_2+D_2=Q_2,\end{gathered}$$

то

$$\begin{aligned}q&=i(A_1+A_2)+j(B_1+B_2)+k(C_1+C_2)+(D_1+D_2)=(Q_1+Q_2),\\ q'&=-i(A_1-A_2)-j(B_1-B_2)-k(C_1-C_2)+(D_1-D_2),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{q'}{a^2+b^2+c^2+d^2}=$$

$$=\big(i(A_1-A_2)+j(B_1-B_2)+k(C_1-C_2)+(D_1-D_2)\big)^{-1}=(Q_1-Q_2)^{-1}.$$

Поэтому формула (1) теперь записывается в виде

$$(\overline{u})(Q_1-Q_2)=(Q_1+Q_2)(u),\tag{9}$$

(где 8 величин $A_1, \ldots, D_2$, уже связанных условием (8), выступают явно однородным образом, так что в последней формуле присутствует правильное число 6 существенных параметров). Кстати, маленькое вычисление, приведшее нас от (1) к (8) и (9), можно найти уже в исходной публикации Кели, только как раз в противоположной последовательности (так что формуле (1) дана роль вывода; см. Crelles Journal 50, 1855 = Кели Werke, с. 202 и след., особенно с. 213–215 там же). Тут желательно присоединить следующие замечания:

1. Если нужно преобразовывать в себя подстановками с вещественными коэффициентами не $u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2$, а $u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2$, то формула (9) переписывается как

$$\begin{aligned}(\overline{u}_4+\varepsilon(i\overline{u}_1+j\overline{u}_2+k\overline{u}_3))(Q_1-\varepsilon\,Q_2)=\\ =(Q_1-\varepsilon\,Q_2)\big(u_4+\varepsilon(iu_1+ju_2+ku_3)\big),\qquad(10)\end{aligned}$$

где $\varepsilon$ — обычная мнимая единица: $\varepsilon^2=-1$.

Формулы (3), (3′) для преобразования 3-тензоров будут тогда гласить:

$$\begin{aligned}(Q_1-\varepsilon\,Q_2)\big(i(\overline{\lambda}_{14}+\varepsilon\,\overline{\lambda}_{23})+j(\overline{\lambda}_{24}+\varepsilon\,\overline{\lambda}_{31})+k(\overline{\lambda}_{34}+\varepsilon\,\overline{\lambda}_{12})\big)=\\ =\big(i(\lambda_{14}+\varepsilon\,\lambda_{23})+j(\lambda_{24}+\varepsilon\,\lambda_{31})+k(\lambda_{34}+\varepsilon\,\lambda_{12})\big)(Q_1-\varepsilon\,Q_2),\qquad(11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(i(\overline{\lambda}_{14}-\varepsilon\,\overline{\lambda}_{23})+j(\overline{\lambda}_{24}-\varepsilon\,\overline{\lambda}_{31}+k(\overline{\lambda}_{34}-\varepsilon\,\overline{\lambda}_{12}))\big)(Q_1+\varepsilon\,Q_2)=\\ =(Q_1+\varepsilon\,Q_2)\big(i(\lambda_{14}-\varepsilon\,\lambda_{23})+j(\lambda_{24}-\varepsilon\,\lambda_{31})+k(\lambda_{34}-\varepsilon\,\lambda_{12})\big).\qquad(11')\end{aligned}$$

2. Объединяя эти формулы с предыдущими, мы имеем дело со свободой выбора $\varepsilon^2=\pm1$, но ее можно еще расширить, чтобы в себя переходила форма

$$u_1^2+u_2^2=u_3^2\pm c^2u_4^2,$$

поскольку для этого достаточно принять $\varepsilon^2=\pm c^2$.

Так открывается возможность последовательно и непрерывно записывать не только группу Лоренца с соответствующей скоростью света $c$, но и группу Галилея–Ньютона как предельный случай при $c=\infty$. Но в последнем случае к (10) надо присоединить условие $\varepsilon^2=0$, обычное при практическом обращении с бесконечно малыми величинами.

Данным путем мы попадаем в область так называемых *бикватернионов*, уже давно разработанную со стороны геометров — с той оговоркой, что у них $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ не истолковываются непосредственно физически, но лишь как относительные координаты в пространстве 3 измерений. Подстановки (10) дают тогда, в зависимости от того, как мы распоряжаемся величиной $\varepsilon^2$, «движения» эллиптического, гиперболического или параболического $R_3$ (в терминах, которые я в свое время предложил для различных видов проективного мероопределения Кели[1]); это служит заменой тем идеям более высокого круга, которые примыкают к общим разработкам Римана, но излишни, когда, как это часто бывает, речь идет о пространствах постоянной положительной, отрицательной или исчезающей кривизны.

[1] Ср. т. 1, конец раздела I четвертой главы.

В связи с различением бикватернионов троякого вида (смотря по принятому $\varepsilon^2 = +1$, $-1$ или 0) ссылаются обычно на Клиффорда, который в нескольких незавершенных сочинениях 1873 и 1876 оставил нам по этому поводу ко многому побуждающие, но не доведенные до конца заметки (Werke № 20 и № 42). Как можно удобно овладеть структурой движений евклидова пространства на основе (10) при $\varepsilon^2 = 0$, исследовал в особенности Штади (Math. Ann. 39, 1891). Более точное резюме немалой литературы по бикватернионам — включая как раз их отношение к ортогональным подстановкам 4 переменных — можно найти в статье I, 5 французской энциклопедии «Nombres complexes» («Комплексные числа») Штади и Картана (Cartan), ср. № 35–36 там же[1].

## § 3. О замене уравнений Максвелла интегральными соотношениями

Кватернионы — только одно из вспомогательных средств, которыми можно удобно выявлять симметрию уравнений Максвелла. Сам Максвелл в своем трактате, как мы уже имели повод замечать, вообще не выписывает никаких дифференциальных уравнений, но устанавливает интегральные соотношения — способ, который несомненно непосредственнее выражает результаты экспериментальных измерений и вообще в некоторых чертах предпочтительнее, например, охватывая случай простых разрывов, встречающихся в электромагнитном поле. С математической стороны, кажется, только недавно стали пристальнее обращать на это внимание; сошлюсь в особенности на уже называвшуюся работу Бейтмена в (2) VII Proceedings of the London Mathematical Society 1909/1910

Нам надлежит рассмотреть кратные интегралы, употребляемые ниже в связи с грассмановыми ступенями: следовательно, вводится «плоский элемент» посредством миноров матрицы, образованной из двух наборов дифференциалов:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'x_4 \end{vmatrix},$$

[1]Упомяну еще, мимоходом там названного, иначе бы почти неизвестного, геометра, учителя Висбаденской гимназии Унферцагта (Unverzagt). Еще в 1871 он выступил с опытом плодотворного применения учения о кватернионах к общему мероопределению в евклидовом $R_3$, откуда выросло обстоятельное представление (Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen, Wiesbaden 1876). Это представление, конечно, другое, по моему мнению неуклюжее, в сравнении с тем, к чему мы привыкли. Никто в то время не обратил внимания на книгу Унферцагта. Трагично видеть, как несомненно высокоодаренный человек, у которого не было связи с единомышленниками, был осужден на безрезультатность своих усилий.

затем «пространственный элемент» посредством сходных определителей третьего порядка и «мировой элемент» определителем четвертого порядка. За поведением интегралов при замене переменных так удобнее следить, чем с обычным способом записи.

Если, например, предложен четырехкратный интеграл (по какому-нибудь «мировому блоку»), мы его пишем как

$$\iiiint f(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & \dots & \dots & d'x_4 \\ d''x_1 & \dots & \dots & d''x_4 \\ d'''x_1 & \dots & \dots & d'''x_4 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Подставим хотя бы

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4) \tag{13}$$

и пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ при этом переходит в $\overline{f}(y_1, y_2, y_3, y_4)$. Тогда сразу ясно, как строится преобразованный интеграл:

$$\iiiint \overline{f}(y_1, y_2, y_3, y_4) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)} \begin{vmatrix} dy_1 & \dots & dy_4 \\ d'y_1 & \dots & d'y_4 \\ d''y_1 & \dots & d''y_4 \\ d'''y_1 & \dots & d'''y_4 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

причем под $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)}$ понимается соответствующий функциональный определитель. Если, в частности, в (13) фигурирует подстановка группы Лоренца, то этот определитель обращается в единицу, следовательно: *если $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ по отношению к данной группе — инвариант («скаляр»), таков же и интеграл; получается интегральный инвариант группы.*

Аналогичные замечания уместны для тройных, двойных и простых интегралов. Тройной интеграл записывается как

$$\iiint \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'x_4 \\ d''x_1 & d''x_2 & d''x_3 & d''x_4 \end{vmatrix} \tag{15}$$

и будет интегральным инвариантом группы Лоренца, если $f_1, f_2, f_3, f_4$ составляют 4-вектор. Двойному интегралу можно придать форму

$$\iint \sum_{i,k} f_{ik}(dx_i\, d'x_k - d'x_i\, dx_k), \tag{16}$$

и получается инвариант группы Лоренца, когда $f_{ik}$ представляют 6-тензор. Напротив, при более общих подстановках (13) интеграл преобразовался бы:

$$\iint \sum_{m,n} \overline{f}_{mn}(dy_m\, d'y_n - d'y_m\, dy_n), \tag{17}$$

где $\overline{f}_{mn}$ составляются из $f_{ik}$ по правилу:

$$\overline{f}_{mn} = \sum_{i,k} \frac{\partial(\varphi_i, \varphi_k)}{\partial(y_m, y_n)} f_{ik} \tag{18}$$

(а внутри $f_{ik}$, естественно, $x_1 \ldots x_4$ выражены через $y_1 \ldots y_4$).

Сюда примыкают те утверждения, которые для 3 измерений связываются с именами Гаусса и Стокса, а в самой общей форме (для $m$-кратных интегралов в $n$-мерных пространствах) приводятся, например, у Пуанкаре[1] и Гурса[2]. Я намерен здесь ограничиться случаем двойного интеграла. Пусть этот интеграл берется по замкнутой поверхности, окружающей трехмерную область. Интеграл по поверхности можно преобразовать в трехмерный интеграл по пространственной области. Чтобы показать, что $f_{ik}$ должны составлять 6-тензор, переобозначаем $f_{ik}$ через $\lambda_{ik}$ и вводим, как раньше, $\mu_{ik} = \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_{ik}}$, тогда имеет силу формула:

$$\iint \sum_{i,k} \lambda_{ik} \begin{vmatrix} dx_i & dx_k \\ d'x_i & d'x_k \end{vmatrix} = \iiint \begin{vmatrix} \sum\limits_k \dfrac{\partial\mu_{1k}}{\partial x_k} & \sum\limits_k \dfrac{\partial\mu_{2k}}{\partial x_k} & \sum\limits_k \dfrac{\partial\mu_{3k}}{\partial x_k} & \sum\limits_k \dfrac{\partial\mu_{4k}}{\partial x_k} \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'x_4 \\ d''x_1 & d''x_2 & d''x_3 & d''x_4 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

В числе ее следствий — неизменное равенство 0 двойного интеграла, распространенного по любой замкнутой поверхности, если во всем $R_4$ удовлетворяются дифференциальные равенства

$$\sum_k \frac{\partial\mu_{1k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial\mu_{2k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial\mu_{3k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial\mu_{4k}}{\partial x_k} = 0.$$

Можно сделать и обратное заключение, если только для $\lambda_{ik}$ выполнены подходящие условия непрерывности*.

---

[1] Acta Mathematica 9 (1887).

[2] Liuvilles Journal (6), vol. 4 (1908).

Это само собой приводит нас к уравнениям Максвелла. В самом деле, раньше мы им придали форму:

$$\text{I.}\quad \sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial x_k} = 0, \qquad \text{II.}\quad \sum_k \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{при } i = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Вместо них мы теперь даем интегральные соотношения:

$$\begin{cases} \text{I.} & \iint \sum\limits_{i,k} \mu_{ik}(dx_i\, d'x_k - d'x_i\, dx_k) = 0 \\ \text{II.} & \iint \sum\limits_{i,k} \lambda_{ik}(dx_i\, d'x_k - d'x_i\, dx_k) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

с интегралами, взятыми по любым замкнутым поверхностям. И этим открывается простой взгляд на инвариантность уравнений Максвелла при любом преобразовании Лоренца, когда мы считаем наборы величин $\lambda_{ik}$ и $\mu_{ik}$ определяющими с разных сторон 6-тензор (и соответственно преобразующимися). Несложным расчетом находим также, что наши уравнения остаются неизменными при любом конформном преобразовании $x_1 \dots x_4$, т. е. по отношению ко всей группе $G_{15}$, о которой мы говорили выше (В I, конец § 7), но этого нет для преобразований иного вида. Сравните с этим с. 79 цитированной работы Бейтмена.

## § 4. Четырехмерный потенциал и основанный на нем вариационный принцип

В непосредственной связи с выкладками предыдущего параграфа стоит введение так называемого *четырехмерного потенциала* $q_1, q_2, q_3, q_4$. Поскольку наш инвариантный двойной интеграл

$$\iint \sum_{i,k} \lambda_{ik}(dx_i\, d'x_k - d'x_i\, dx_k),$$

взятый по любой замкнутой поверхности, равен 0, то, взятый по ограниченному куску поверхности, он должен совпадать с каким-то граничным интегралом:

$$\int (q_1\, dx_1 + q_2\, dx_2 + q_3\, dx_3 + q_4\, dx_4), \tag{21}$$

откуда по обобщенной теореме Стокса заключаем, что можно провести связь

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \operatorname{Rot} q \tag{22}$$

(и тогда уравнения Максвелла тождественно выполняются). При этом мы можем, не меняя $\lambda_{ik}$, прибавить к $q_1, \ldots, q_4$ еще $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4}$, где под $f$ понимается произвольная функция $x$, удовлетворяющая необходимым условиям однозначности и непрерывности. Тогда подходящим выбором этой функции можно подчинить $q$ условию, чтобы исчезла большая дивергенция:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{\partial q_4}{\partial x_4} = 0. \tag{23}$$

С этим уточнением величины $q$, ввиду инвариантного смысла (22), носят характер компонентов вектора.

Все это построение, доставляющее значительнейшие формальные упрощения, присутствует в зародыше уже у самого Максвелла, но сделано полностью явным, кажется, только в 1898 Ленард (Liénard) в т. 16 Eclairage électrique. Можно, конечно, найти его и раньше в несимметричной форме, которой пользуется Лоренц в № 4 своего реферата в Энциклопедии V, 14, когда он пишет

$$\begin{aligned} (X, Y, Z) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \\ (L, M, N) &= \operatorname{rot} a, \end{aligned} \tag{24}$$

понимая под $a$ трехмерный «векторный потенциал» $(a_1, a_2, a_3)$, под $\varphi$ скалярный потенциал (трехмерного пространства). Написав, как принято у нас,

$$\begin{aligned} iX &= \lambda_{14}, \quad iY = \lambda_{24}, \quad iZ = \lambda_{34}, \\ L &= \lambda_{23}, \quad M = \lambda_{31}, \quad N = \lambda_{12}, \end{aligned}$$

и заменив $x$, $y$, $z$, $ict$ соответственно на $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, в итоге мы должны отождествить:

$$a_1, a_2, a_3, \varphi = -q_1, -q_2, -q_3, iq_4{}^1 \tag{25}$$

и прийти обратно к формулам (22). Минковский естественным образом вводит уже эти симметричные формулы, см. его доклад Геттингенскому математическому обществу в ноябре 1907[2].

---

[1]Знаки минус перед $q_1$, $q_2$, $q_3$ возникают из-за того обстоятельства, что Лоренц использует правую систему координат $x$, $y$, $z$, тогда как мы вслед за Герцем левую.

[2]См. с. 93.

Подставим теперь выражения (22) в уравнения Максвелла I. Получается 4 уравнения:

$$\Box\, q_i - \frac{\partial \operatorname{div} q}{\partial x_i} = 0, \tag{26}$$

а из них с помощью (23):

$$\Box\, q_i = 0. \tag{27}$$

Этим дифференциальные уравнения электромагнитного поля приведены, вероятно, к простейшему возможному виду[1].

Следующий шаг состоит в том, что уравнения Максвелла I

$$\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{при } i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

мы собираем в единый *вариационный принцип*. Для этого предписывается потребовать

$$\delta \overline{\underline{\iiiint}} \sum_{i,k} \lambda_{ik}^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0,^2 \tag{28}$$

куда подставляется

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k},$$

а при варьировании подразумевается, что мы придаем конкретно заданным $q_1 \ldots q_4$ произвольные приращения $\delta q_1 \ldots \delta q_4$ (которые только на границе должны исчезать, что отмечено горизонтальными штрихами при знаках интеграла).

В самом деле, найдем вариацию $\delta J$ нашего интеграла по обычным правилам:

$$\delta J = \overline{\underline{\iiiint}} \left[\sum_i \delta q_i \left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_i}\right)\right] dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4, \tag{29}$$

это тотчас ведет к уравнениям Максвелла I.

Инвариантность уравнений Максвелла по отношению к преобразованиям Лоренца обнаруживается здесь очень просто, поскольку $\sum\limits_{i,k} \lambda_{ik}^2$

---

[1]Следует обратить внимание на формальную аналогию с формулами (3) и (4) с. 78. — *Прим. ред.*

[2]Возвращаемся к обычному обозначению объема посредством $dx_1 \cdot dx_2 \ldots dx_n$.

является скаляром по отношению к этим преобразованиям. Дифференциальная зависимость между уравнениями

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_i}\right) = 0$$

также выявляется по ходу дела. Действительно, $\lambda_{ik}$ остаются неизменными, если к $q_i$ прибавить какие-нибудь $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Подставив в соответствии с этим в вариацию (29) вместо $\delta q_i$ значения $\frac{\partial \delta f}{\partial x_i}$. Мы должны получить тождество:

$$\overline{\underline{\iiiint}} \left[\sum_i \frac{\partial \delta f}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_i}\right)\right] dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0;$$

но его преобразование интегрированием по частям дает для произвольного $\delta f$

$$\overline{\underline{\iiiint}} \delta f \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_k}\right)\right] dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0$$

с явно выступающей указанной зависимостью.

Интересно сравнить этот полностью симметричный принцип с тем несимметричным, который мы давали в т. 1 гл. V по Мак-Куллагу. К той форме, оказывается, можно перейти, положив в наших теперешних выкладках лишь $q_4 = 0$ (что само по себе не уменьшает общности, но ограничивает дело использованием только вариаций $\delta q_1$, $\delta q_2$, $\delta q_3$).

Вариационные принципы всегда особенно полезны, когда дело доходит до замены переменных. Это свойство мы хотим здесь использовать для проверки инвариантности уравнений Максвелла при наиболее общем конформном преобразовании $x_1, \ldots, x_4$, иначе говоря, по всей группе $G_{15}$, действие которой сводится к

$$(dx_1^2 + \ldots + dx_4^2) = \varrho^2(dy_1^2 + \ldots + dy_4^2) \quad (\varrho \neq 0). \tag{30}$$

Для доказательства надо просто обосновать, что вариационный принцип (28):

$$\delta \overline{\underline{\iiiint}} \sum_{i,k} \lambda_{ik}^2 \cdot dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0$$

сохраняет силу при произвольном конформном преобразовании.

Пусть, как в (13),

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Тогда сначала можно, как в свое время объяснил Якоби, а мы в (12), (14) использованием грассманова способа записи дифференциалов сделали еще нагляднее, заменить

$$dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \cdot dx_4 \quad \text{на} \quad D \cdot dy_1 \cdot dy_2 \cdot dy_3 \cdot dy_4, \tag{31}$$

понимая под $D$ функциональный определитель

$$D = \frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_4)}{\partial(y_1 \ldots y_4)}.$$

Остается исследовать, как заменяется

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}^2 = \sum_{i,k} \left( \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \right)^2.$$

Сперва у нас имеются для $dx_i$ однородные линейные подстановки:

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_4} dy_4 \tag{32}$$

(определитель которых — это как раз функциональный определитель $D$). Операторы $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_4}$ и точно так же величины $q_i$, естественно, ведут себя контрагредиентно к $dx_i$ (последнее верно потому, что сумма $q_1\,dx_1 + \ldots + q_4\,dx_4$ должна быть инвариантна). Имеем, например (отмечая преобразованное $q$ горизонтальной чертой):

$$\overline{q}_i = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} q_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y_i} q_4. \tag{33}$$

Дело сводится к тому, чтобы рассчитать преобразованные $\lambda$, именно,

$$\overline{\lambda}_{ik} = \frac{\partial \overline{q}_k}{\partial y_i} - \frac{\partial \overline{q}_i}{\partial y_k}. \tag{34}$$

Можно было бы сперва подумать, что в дальнейшие формулы войдут вторые производные от $\varphi$ по $y$. Но расчет показывает, что соответствующие члены как раз и уничтожаются. Все происходит, как если бы коэффициенты линейных подстановок (32), (33) были постоянны. В этом смысле мы, как раньше, находимся в рамках элементарной теории инвариантов: $\lambda_{ik}$ ведет себя, как определители из элементов двух строк, контрагредиентных к $dx$.

Мы находимся даже в области ортогональных подстановок с той только разницей, что $\sum dx_i^2$ в силу (30) переводится не в $\sum dy_i^2$, а в $\varrho^2 \sum dy_i^2$. Несложные выкладки показывают, что определитель подстановки $D$ сейчас равен не $\pm 1$, а $\pm \varrho^4$ и что с другой стороны $\sum \lambda_{ik}^2$ переходит в $\sum \overline{\lambda}_{ik}^2 : \varrho^4$. Следовательно, обе степени $\varrho$ под знаком интеграла как раз взаимно сокращаются, и интеграл остается неизменным с точностью до возможного обращения знака. Но и это обращение знака останется без последствий, когда мы приравняем вариацию интеграла 0. Итак, уравнения Максвелла остаются неизменными.

## § 5. Примеры применения нашего четырехмерного анализа к специальным проблемам

Мы знаем группы преобразований, оставляющие уравнения Максвелла инвариантными:

1) группа Лоренца;

2) охватывающая ее конформная $G_{15}$,

и возникает вопрос, какую пользу мы можем отсюда извлечь.

Во всех подобных случаях представляются две ступени, которые проходит математическая мысль;

а) использование преобразования с целью получения новых соотношений из уже известных,

б) развитие умственных привычек до такой степени абстракции, когда прямо воспринимается то, что́ инвариантно по отношению к группе. Такое развитие было уже в четвертой главе т. 1 описано на примере новой геометрии в том, что́ касается проективных отображений пространства: образованный проективист призывает видеть переносы путем проекции, связующие такие результаты, которые прежние геометры получали, рассматривая как существенно различные, и которые ныне считаются само собой разумеющимися частными случаями: для него это лишь различные формулировки одного и того же стержня мысли.

Обе ступени, как уже отмечено выше, пройдены для группы Лоренца. Представляя первоначально — у самого Лоренца, у Лармора и др. — только вспомогательное средство в смысле а), она благодаря Пуанкаре и, прежде всего, Эйнштейну и Минковскому стала основой нового, соответствующего этапу б), «мирового восприятия».

Иначе обстоит дело с группой $G_{15}$, которая вообще не привлекла еще к себе столь большого внимания. Она пока использовалась только в смысле а), интуиция же физиков, которых я запрашивал, совершенно противится тому, чтобы осуществился переход к б).

В соответствии с реферативным характером этой книги в дальнейшем я буду обсуждать почти исключительно $G_{10}$; при этом я не хочу начинать с компромиссов с навязывающимся трехмерным способом мышления, напротив, оно должно сразу следовать современному четырехмерному принципу во всей его простоте.

Итак, будем говорить в этом параграфе о применении группы Лоренца в смысле а). Я представлю только две задачи, относящиеся обе к отдельному электрону. Его текущие координаты пусть обозначаются $x_1 \ldots x_4$. Чтобы не вводить несимметричность, мы должны откинуть обычное понятие скорости (которая подразумевала бы особенную роль $x_4$). Напротив, мы будем дифференцировать $x_1 \ldots x_4$ по инвариантному элементу длины

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}, \tag{35}$$

а совокупность производных

$$\frac{dx_1}{ds} = x_1', \ \ldots, \ \frac{dx_4}{ds} = x_4' \tag{36}$$

называть направляющим вектором; разумеется, при этом

$${x'}_1^2 + \ldots + {x'}_4^2 = 1. \tag{37}$$

Мы можем пойти навстречу обычным понятиям и с помощью подходящего преобразования Лоренца добиться, чтобы в определенный момент было

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad \text{и точно так же} \quad x_1' = x_2' = x_3' = 0,$$

причем надо принять $x_4' = \pm 1$. Минковский называл эту замену нулями трех первых компонентов направления: *электрон приводится в состояние покоя*. Традиционные физические знания мы применяем к такому покоящемуся электрону, чтобы потом вывести из них уже общие законы с помощью произвольных преобразований Лоренца.

Первая задача: *Влияние заданного электромагнитного поля на произвольно движущийся электрон.*

Заданы $\lambda_{ik}$, связанные с обычно употребляемыми $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$, как установлено нами ранее, следующим образом:

$$\varepsilon X = \lambda_{14}, \quad \varepsilon Y = \lambda_{24}, \quad \varepsilon Z = \lambda_{34} \quad (\varepsilon = \sqrt{-1}),$$
$$L = \lambda_{23}, \quad M = \lambda_{31}, \quad N = \lambda_{12}.$$

Образуем по этим данным действующую на электрон четырехмерную силу: ее нам желательно представить как 4-вектор, три компонента $P_1$, $P_2$, $P_3$ которого соответствовали бы компонентам силы в смысле обычной механики, в то время как четвертая $P_4$ должна так подбираться, чтобы всегда удовлетворять условию

$$x_1'P_1 + x_2'P_2 + x_3'P_3 + x_4'P_4 = 0. \tag{38}$$

В таком случае сообразно традиционным физическим законам электрону с зарядом $e$ в заданном электромагнитном поле надлежит приписать четырехмерную силу:

$$P_1 = eX, \quad P_2 = eY, \quad P_3 = eZ, \quad P_4 = 0, \tag{39}$$

а в терминах $\lambda_{ik}$, следовательно:

$$P_1 = -\varepsilon e\lambda_{14}, \quad P_2 = -\varepsilon e\lambda_{24}, \quad P_3 = -\varepsilon e\lambda_{34}, \quad P_4 = 0. \tag{39$'$}$$

Далее постулируется, что у движущегося электрона четырехмерная сила зависит только от первых производных $x_1' \ldots x_4'$ и притом л и н е й н о. Тогда ясно, что на формулы (39′) можно смотреть как на частный случай следующего общего положения:

$$P_1 = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{1k}x_k', \ \ldots, \ P_4 = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{4k}x_k'.^1 \tag{40}$$

Этим наша задача уже решена, но мы хотим кое-что добавить относительно движения электрона в заданном силовом поле. По аналогии с обычной механикой полагаем (понимая под $m$ инертную массу, связанную с электроном)

$$mx_i'' = P_i = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{ik}x_k'. \tag{41}$$

Если здесь выразить $\lambda_{ik}$ с помощью четырехмерного потенциала $q$ поля, эти дифференциальные уравнения можно опять-таки изящно собрать

[1] Поскольку, согласно (13) с. 101 компоненты (40) во всяком случае составляют вектор, а $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i'P_i$ — инвариант. Для специального случая $x_1' = x_2' = x_3' = 0$, $x_4' = 1$ значения компонентов, определяемые (39′), дают $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i'P_i = 0$, т. е. (38) выполнено. Следовательно, (38) верно в любой системе координат.

в единый вариационный принцип (который соответствует принципу Гамильтона в обычной механике):

$$\delta\overline{\underline{\int}}\left(\frac{m}{2}\sum_i x'^2_i + \varepsilon e\sum_i q_i x'_i\right) ds = 0 \tag{42}$$

($x_i$ подлежит варьированию: горизонтальные штрихи при знаках интеграла означают, как и раньше, исчезновение вариаций на границах). Действительно, когда мы по общим правилам вариационного исчисления образуем на основе (42) уравнения

$$\frac{d\dfrac{\partial()}{\partial x'_i}}{ds} - \frac{\partial()}{\partial x_i} = 0,$$

они точно совпадают с (41). — Поскольку $\sum x'^2_i = 1$, мы можем представить принцип (42) еще и в следующей форме, с определенных сторон более предпочтительной,

$$\delta\overline{\underline{\int}}\left(m\sqrt{\sum_i x'^2_i} + \varepsilon e\sum_i q_i x'_i\right) ds = 0. \tag{43}$$

Поскольку здесь все члены однородны первого порядка по $x'_i$, можно также написать:

$$\delta\overline{\underline{\int}}\left(m\sqrt{\sum_i dx^2_i} + \varepsilon e\sum_i q_i\, dx_i\right) = 0. \tag{43'}$$

Вторая задача: *Об электромагнитном поле равномерно движущегося электрона.*

Чтобы по возможности избавиться от необходимости нагромождать индексы друг на друга, будем вместо $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ снова писать $x$, $y$, $z$, $l$, а для $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $x'_4$ возьмем краткие обозначения $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ (причем, конечно, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$.) Равномерно движущимся называют такой электрон, мировая линия которого в $R_4$ — прямая, а координаты соответственно выражаются в виде:

$$x_0 + s\alpha, \quad y_0 + s\beta, \quad z_0 + s\gamma, \quad l_0 + s\delta. \tag{44}$$

Определение их поля мы сводим к отысканию его векторного потенциала.

Снова совмещаем исходное положение электрона с началом координат и приводим электрон в состояние покоя, это значит

$$x_0 = y_0 = z_0 = l_0 = 0; \quad \alpha = \beta = \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

В данной системе координат текущие координаты пусть обозначаются $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{l}$. Элементарным физическим представлениям соответствует следующий четырехмерный потенциал:

$$\overline{q}_x = 0, \quad \overline{q}_y = 0, \quad \overline{q}_z = 0, \quad \overline{q}_l = -\frac{\varepsilon e}{\overline{r}}, \tag{45}$$

где $\overline{r} = \sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 + \overline{l}^2}$ и $\varepsilon = \sqrt{-1}$. Нужные уравнения

$$\Box \overline{q}_x = \ldots = \Box \overline{q}_l = 0, \quad \operatorname{div} \overline{q} = 0$$

при этом удовлетворяются. Из (21), с. 111 получаются компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} &\overline{X} = -\varepsilon\overline{\lambda}_{14} = \frac{e\overline{x}}{r^3}, \quad &&\overline{Y} = -\varepsilon\overline{\lambda}_{24} = \frac{e\overline{y}}{r^3}, \quad &&\overline{Z} = -\varepsilon\overline{\lambda}_{34}\frac{e\overline{z}}{r^3}, \\ &\overline{L} = 0, &&\overline{M} = 0, &&\overline{N} = 0 \end{aligned}$$

в согласии с традиционной установкой.

Обратимся теперь к распространению четырехмерного потенциала (45) на о б щ и е траектории (44). Я утверждаю, что решение имеет следующий вид:

$$q_x = -\frac{\varepsilon e\alpha}{R}, \quad q_y = -\frac{\varepsilon e\beta}{R}, \quad q_z = -\frac{\varepsilon e\gamma}{R}, \quad q_l = -\frac{\varepsilon e\delta}{R}, \tag{46}$$

где $R$ представляется как

$$R = +\sqrt{\left((x-x_0)^2 + \ldots + (l-l_0)^2\right) - \left(\alpha(x-x_0) + \ldots + \delta(l-l_0)\right)^2}. \tag{46$'$}$$

Для доказательства достаточно заметить, что в (46) задан четырехмерный вектор (поскольку $R$ составлено из заведомых скаляров) и что в специальном случае (46) переходит в (45). Между прочим, в нашем специальном случае проверяется интерпретация $R$: это длина перпендикуляра, опущенного из точки $(x, y, z, l)$ на мировую прямую (44) электрона.

Случайность выбора точки ($x_0$, $y_0$, $z_0$, $l_0$) на мировой прямой никакой роли в (46), (46′) не играют. Действительно, легко видеть, что $R$ можно записать следующим образом:

$$R = \sqrt{\sum p_{0ik}^2},$$

где $p_{0ik}$ — двучленные миноры матрицы

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 & l - l_0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

а для них, в свою очередь, очевидна неизменяемость при замене $x_0$, $y_0$, $z_0$, $l_0$ на произвольную точку (44).

Это свойство можно использовать, чтобы еще несколько упростить формулы (46), (46′). Именно, выберем точку $x_0$, $y_0$, $z_0$, $l_0$ на мировой прямой так, чтобы

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (l - l_0)^2 = 0.$$[1]

Тогда

$$q_x = -\frac{\varepsilon\alpha}{P}, \quad q_y = -\frac{\varepsilon\beta}{P}, \quad q_z = -\frac{\varepsilon\gamma}{P}, \quad q_l = -\frac{\varepsilon\delta}{P}, \tag{47}$$

где

$$P = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) + \delta(l - l_0). \tag{47′}$$

Так сформулированный результат есть специальный случай формул, которые для векторного потенциала произвольно выбранного электрона (представляемого точкой) вывели Лиенар в 1898 (т. 16 Eclairage électrique) и Вихерт в 1900 (Archives Neerlandaises, 1900, с. 549): мы еще вернемся к этим формулам (с. 139).

Эти два примера достаточно отображают то применение группы Лоренца $G_{10}$, которое выше мы имеем как пункт a). Если же, в связи с нашим вторым примером, вместо нее принять конформную $G_{15}$, то получим случай электрона с круговым движением в $R_4$ по $x$, $y$, $z$, $l$, но по отношению к $x$, $y$, $z$, $t$ это движение по гиперболе, асимптоты которой параллельны двум образующим конуса $dx^2 + \ldots - c^2\,dt^2 = 0$. Как раз такой случай Борн (Born) называет «гиперболическим движением» (электрона). После этого замечания мы должны обратить внимание на следующую ступень.

---

[1]Этим точка $x_0$, $y_0$, $z_0$, $l_0$ фиксирована только с точностью до знака перед радикалом, однозначная договоренность будет принята в следующем разделе.

## § 6. Теория относительности группы Лоренца

Мы должны кое-что сказать теперь во исполнение пункта б) предыдущего параграфа. Значение придается, соответственно, только тому, что́ инвариантно по отношению к группе Лоренца; как-то: что скаляр равен определенному числу, что 4-вектор или 10-тензор или векторная дивергенция 10-тензора тождественно исчезают и т. д. Все высказывания физики должны так обозреваться, чтобы они приобрели указанный характер. В переходе к такой собственно релятивистской манере выражения мы и усматриваем итог идейной эволюции теории.

С позиций этого современного представления, физические приложения, к сожалению, не продвинулись в достаточной мере, чтобы мы располагали большим числом примеров.

Подчеркнем здесь только, что традиционная трактовка может относить какую-либо величину к скалярам, тогда как новая решает по-разному: либо величина остается скаляром, либо представляет собой на самом деле четвертый компонент 4-вектора, либо последний компонент 10-тензора (сразу видно, что если редуцировать лоренцеву $G_{10}$ до обычной евклидовой $G_6$ ограничением $l' = l$, четвертый компонент 4-вектора и последний компонент 10-тензора превращаются в обособленные инвариантные объекты).

Скалярами остаются, например, масса $m$ и заряд $e$ (электрона), см. их введение в (41) в предыдущем параграфе.

Компонентом 4-вектора оказывается скалярный потенциал электромагнитного поля ($\varphi$ в формуле (24) § 4), компонентом же 10-тензора (как уже упоминалось в конце § 1) его удельная энергия.

Что касается этого особенно важного тензора (формула (17) § 1), я бы счел полезным для более четкого представления связи с традиционной физикой переписать его в компонентах $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$ с исключением множителя $\varepsilon c$ из элементов последней строки и последнего столбца. Получается тогда:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
\frac{1}{2}\begin{vmatrix} L^2-M^2-N^2 \\ +X^2-Y^2-Z^2 \end{vmatrix} & LM+XY & LN+XZ & \frac{NY-MZ}{c} \\
LM+XY & \frac{1}{2}\begin{vmatrix} M^2-N^2-L^2 \\ +Y^2-X^2-Z^2 \end{vmatrix} & MN+YZ & \frac{LZ-NX}{c} \\
LN+XZ & MN+YZ & \frac{1}{2}\begin{vmatrix} N^2-L^2-M^2 \\ +Z^2-X^2-Y^2 \end{vmatrix} & \frac{MX-LY}{c} \\
\hline
\frac{NY-MZ}{c} & \frac{LZ-NX}{c} & \frac{MX-LY}{c} & -\frac{1}{2c^2}\begin{vmatrix} L^2+M^2+N^2 \\ +X^2+Y^2+Z^2 \end{vmatrix}
\end{array}\right) \tag{48}$$

Эти компоненты контрагредиентны к

$$dx^2,\ 2dx\,dy,\ dy^2,\ \ldots,\ dt^2.$$

Я отметил разделяющими штрихами, как данные элементы должны классифицироваться согласно традиционным физическим воззрениям:

Последний элемент означает, как уже говорилось — только теперь с обратным знаком — *удельную энергию.*

3 других элемента последней строки или столбца следует называть *электромагнитным импульсом.*

Последние девять элементов выражают то, что́ у Максвелла называется напряжениями среды.

Но есть еще важное, тоже упоминавшееся, свойство обращения векторной дивергенции 10-тензора (48) в нуль.

Для четвертой строки мы записываем это свойство следующим образом:

$$\frac{\partial\left(\frac{NY-MZ}{c}\right)}{\partial x}+\frac{\partial()}{\partial y}+\frac{\partial()}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L^2+M^2+N^2+X^2+Y^2+Z^2}{2c^2}\right). \tag{49}$$

Эти формальные выкладки мы впервые встречаем у Пойнтинга (Phil. Transactions 1884), и они выражают *закон сохранения энергии*: компоненты импульса могут рассматриваться как «компоненты потока» энергии (из-за чего часто говорят просто о потоке Пойнтинга).

Одновременно видно, что это утверждение — только одно из 4 взаимно координированных; три других свидетельствуют, что аналогичным образом в каждой другой строке стоящие там максвелловские напряжения могут рассматриваться как компоненты потока соответственно направленного импульса.

Законы сохранения энергии и всех трех импульсов сливаются таким образом в единое целое, что уже было показано (и поставлено на видное место) в **A**, § 2 для области классической механики.

Довольно этих общих разъяснений! В каждом из нас, старых исследователей, всегда только с известным трудом совершалось переключение хода физической мысли на тот путь, который указывает последовательная теория относительности группы Лоренца; задача молодого поколения — всецело приспособиться действовать в новой идейной атмосфере[1].

---

[1]Встает вопрос, не будет ли теория относительности конформной группы $G_{15}$ когда-либо играть такую же роль для физической мысли. Я в это не верю. Группа Лоренца, при всех отклонениях в частностях, в целом еще состоит в известном родстве с группой Галилея – Ньютона классической теории, которое наиболее четко выражается в том, что последнюю можно рассматривать как предельный случай первой в случае бесконечно большой скорости света (смотри с. 107, § 2). Переход к теории относительности конформной $G_{15}$ влиял бы много радикальнее. Сто́ит только подумать, что $G_{15}$ содержит любое

# III. Выявление условий вещественности в группе Лоренца

Сейчас нам предстоит заняться теми определениями и изменениями, которые необходимы, когда вместо $x$, $y$, $z$, $l$ мы снова подставляем $x$, $y$, $z$, $\varepsilon ct$ (понимая под $c$ скорость света) и ограничиваемся при этом вещественными значениями $x$, $y$, $z$, $t$. Совокупность этих вещественных $x$, $y$, $z$, $t$ мы вслед за Минковским называем *миром*.

## § 1. Введение

1. Фундаментальная квадратичная форма, условие инвариантности которой определяет однородные преобразования Лоренца, теперь выглядит как:

$$f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2. \tag{1}$$

Корень из нее $\sqrt{f}$ мы считаем *расстоянием* между двумя мировыми точками, так что для расстояния $ds$ двух бесконечно близких точек получается:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2.\text{[1]} \tag{2}$$

Наряду с такой *длиной* $ds$ линейного элемента — сообразно знаконеопределенному характеру квадратичной формы — целесообразно вводить его *длительность* $d\tau$. Именно полагаем

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}. \tag{3}$$

2. Когредиентность и контрагредиентность сейчас больше не совпадают в точности. Основываемся на том, что скаляром, во всяком случае, является поляра дифференциальной формы (2):

$$dx\,d'x + dy\,d'y + dz\,d'z - c^2\,dt\,d't. \tag{4}$$

С другой стороны, пожелаем, чтобы скаляром была линейная форма

$$u\,d'x + v\,d'y + w\,d'z + \overline{w}\,d't. \tag{5}$$

возможное преобразование обратных радиусов, что, стало быть, с этой группой любую точку пространства времени $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ можно отбросить в бесконечность. — По такой же причине (так как упраздняется различие конечного и бесконечно удаленного) в физике не смог пустить прочных корней способ рассуждения проективной геометрии.

[1]Естественно руководиться такой из дифференциальных форм, которая сокращает запись: стоит подчеркнуть, что при группе Лоренца мы еще имеем дело только лишь с алгебраическими принципами элементарной теории инвариантов, точнее, с построениями Грассмана-Кели и не стремимся к Риману с его общим $ds^2 = \sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ (с $a_{ik}$, зависящими от $x$ «как угодно»).

Введенные $u$, $v$, $w$, $\overline{w}$, контрагредиентные к $d'x$, $d'y$, $d'z$, $d't$ или также $dx$, $dy$, $dz$, $dt$, могут, очевидно, преобразовываться только как $dx$, $dy$, $dz$, $-c^2\,dt$. Новое представление через них квадратичной формы:

$$u^2+v^2+w^2-\frac{\overline{w}^2}{c^2}. \tag{6}$$

В связи с этим различаем все время 4-векторы двоякого вида (дуальные друг другу).

3. В частности, операторы

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}$$

будут теперь контрагредиентны к $dx$, $dy$, $dz$, $dt$. Соответственно, по заданной скалярной функции $f$ из производных первого порядка строится сейчас скаляр

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2, \tag{7}$$

а обозначение $\square$ соотносится с дифференциальным оператором второго порядка:

$$\square=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Большой дивергенцией поля векторов второго вида служит

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}=\operatorname{div}(u). \tag{9}$$

4. Прежние ортогональные подстановки:

$$d'x=\alpha_{11}\,dx_1+\alpha_{12}\,dx_2+\alpha_{13}\,dx_3+\alpha_{14}\,dx_4$$

записываются теперь следующим образом:

$$\begin{aligned}
d'x&=\alpha_{11}\,dx+\alpha_{12}\,dy+\alpha_{13}\,dz+\varepsilon\,c\,\alpha_{14}\,dt,\\
d'y&=\alpha_{21}\,dx+\alpha_{22}\,dy+\alpha_{23}\,dz+\varepsilon\,c\,\alpha_{24}\,dt,\\
d'z&=\alpha_{31}\,dx+\alpha_{32}\,dy+\alpha_{33}\,dz+\varepsilon\,c\,\alpha_{34}\,dt,\\
d't&=\frac{\alpha_{41}\,dx+\alpha_{42}\,dy+\alpha_{43}\,dz}{\varepsilon c}+\alpha_{44}\,dt.
\end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку мы впредь ограничиваем группу Лоренца *вещественными* подстановками $x$, $y$, $z$, $t$, то нужно использовать чисто мнимые $\alpha_{14}$, $\alpha_{24}$, $\alpha_{34}$ и $\alpha_{41}$, $\alpha_{42}$, $\alpha_{43}$, считая остальные $\alpha_{ik}$ вещественными, это ясно видно уже на простых примерах систем $dx, \ldots, dt$.

Иное, основанное на бикватернионах, представление так определенных однородных подстановок Лоренца получается переформулировкой выкладок § 2 предыдущего раздела следующим образом: Пусть

$$\varepsilon' = \frac{\sqrt{-1}}{c}.$$

Далее возьмем вещественные кватернионы[1]

$$Q_1 = iA_1 + jB_1 + kC_1 + D_1,$$
$$Q_2 = iA_2 + jB_2 + kC_2 + D_2,$$

которые удовлетворяют «условию ортогональности»:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = 0.$$

Тогда подстановка (10) записывается в форме:

$$\begin{aligned}\big(d't + \varepsilon(i\,d'x + j\,d'y + k\,d'z)\big)(Q_1 - \varepsilon\,Q_2) &= \\ = (Q_1 + \varepsilon Q_2)\big(dt + \varepsilon(i\,dx + j\,dy + k\,dz)\big).&\qquad (11)\end{aligned}$$

5. Скажем еще о четырехмерном потенциале $q_x$, $q_y$, $q_z$, $q_t$ и связанном с ним способе записи уравнений Максвелла. Наши новые $q$ рассматриваются как вектор второго вида, поскольку, как было замечено на с. 111, комбинация $q_x\,dx + q_y\,dy + q_z\,dz + q_t\,dt$ должна быть скаляром. Вытекающее из этого соотношение с прежними $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$ таково:

$$q_x = q_1, \quad q_y = q_2, \quad q_z = q_3, \quad q_t = \varepsilon\, c\, q_4. \qquad (12)$$

Ограничение на дивергенцию гласит:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial q_t}{\partial t} = 0. \qquad (13)$$

Напряженности электромагнитного поля теперь задаются минорами матрицы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{1}{\varepsilon\, c}\dfrac{\partial}{\partial t} \\ q_x & q_y & q_z & \dfrac{q_t}{\varepsilon\, c} \end{vmatrix}.$$

[1] Т. е. $A_1, \ldots, D_2$ вещественны.

Приняв во внимание, что надо положить

$$\lambda_{14} = \varepsilon X, \quad \lambda_{24} = \varepsilon Y, \quad \lambda_{34} = \varepsilon Z, \quad \lambda_{23} = L, \quad \lambda_{31} = M, \quad \lambda_{12} = N,$$

получаем:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial q_x}{\partial t} - \frac{\partial q_t}{\partial x}\right), \dots, \\ L &= \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z}, \dots, \end{aligned} \tag{14}$$

что соответствует приведенным на с. 112 формулам Лоренца, если мы введем его трехмерный векторный потенциал $a = -(q_x, q_y, q_z)$ и его «скалярный» потенциал $\varphi = \frac{q_t}{c}$ (смотри формулу (25) там же). Но и для новых $q$, кроме (13), имеют силу еще уравнения:

$$\Box q_x = 0, \quad \Box q_y = 0, \quad \Box q_z = 0, \quad \Box q_t = 0, \tag{15}$$

где под $\Box$ понимается оператор (8).

## § 2. Вспомогательные геометрические понятия

Вдохнем жизнь в «четырехмерный мир» $x$, $y$, $z$, $t$ посредством определенных вспомогательных понятий, как у Минковского, но порой давая кое-что сверх того.

### $a$) Алгебраические соотношения[1]

1. Согласно формуле (1) предыдущего параграфа из каждой точки $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ исходит «гиперконус»

$$f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0. \tag{1}$$

Все эти конусы «параллельно поставлены», они для бесконечно больших координат из $R_3$ касаются в нашем четырехмерном мире одной и той же *фундаментальной структуры*. Чтобы это четко выразить, введем временно однородные координаты, положив

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_5}, \quad y = \frac{\xi_2}{\xi_5}, \quad z = \frac{\xi_3}{\xi_5}, \quad t = \frac{\xi_4}{\xi_5}. \tag{2}$$

Данная структура выражается тогда совокупностью двух уравнений:

$$\xi_5 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - c^2\xi_4^2 = 0, \tag{3}$$

[1]Ради многомерного способа выражения полезна хотя бы резюмирующая статья Сегре (Segre): Энциклопедия, т. 3 С. 7.

в плоскостных же (контрагредиентных) координатах $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, $\nu_4$, $\nu_5$ достаточно одного уравнения с нулевым определителем:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0. \tag{4}$$

Для всяких условий вещественности определяющим признаком является то, с какими знаками выступают члены в этих уравнениях. Соответственно мы характеризуем нашу фундаментальную структуру (3) как эллипсоид. Всем гиперконусам $f = \text{const}$ как раз свойственно содержать в себе этот эллипсоид.

2. Это положение вещей становится обозримее, если мы не будем двигаться по одному из измерений и ограничим себя, например, условием $z = z_0$, изображая $x$, $y$, $t$ в то же время, как прямоугольные координаты $R_3$. Основу построения дает тогда, очевидно, круговой конус

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0. \tag{5}$$

У каждого такого конуса ось вращения параллельна оси $t$, но их можно характеризовать как *очень плоские*, если придерживаться сантиметра и секунды как единицы измерения: тогда ведь у скорости света «очень большое» значение $3 \cdot 10^{10}$ см/с. Хотя бы эта величина считалась математически еще не столь большой, но психологически она огромна. Поэтому без недоумения можно вообразить $c = \infty$ как *предельный* случай, когда (5) превращается в дважды засчитываемую плоскость $t = t_0$.

3. Специальные свойства прямолинейных образующих

$$x = x_0 + \varrho\alpha, \quad y = y_0 + \varrho\beta, \quad z = z_0 + \varrho\gamma, \quad t = t_0 + \varrho\delta \tag{6}$$

конуса (1) (причем должно быть $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - c^2\delta^2 = 0$) тоже легко представить в трехмерной интерпретации. Каждая такая образующая остается образующей и для конуса, построенного из любой ее точки. Более того, все конусы этого семейства касаются друг друга как раз вдоль исходной образующей. Если составить мысленный образ из точек касания и плоскостей касания, причем последние в данном случае сводятся к одной:

$$\nu_1 = \alpha, \quad \nu_2 = \beta, \quad \nu_3 = \gamma, \quad \nu_4 = -c^2\delta, \tag{7}$$

то и получается простейший пример объекта, который мы позже[1] вслед за Ли называем полосой (с той только оговоркой, что на полосе общего вида касательная плоскость меняется с перемещением точки вдоль кривой).

---

[1]Это указание относится к запланированной четвертой, не реализованной главе. Ср. Введение. — *Прим. ред.*

4. В связи с тем, что в (1) встречаются только квадраты разностей $(x - x_0), \ldots, (t - t_0)$, оси $x$, $y$, $z$, $t$ системы координат параллельны некоторым «сопряженным диаметрам» нашего гиперконуса. Ясно, что мы имеем дело с инвариантным соотношением и что любую четверку взаимно сопряженных диаметров гиперконуса (1) можно подходящим преобразованием Лоренца поставить в указанное положение параллельности осям.

При этом важно разделять связанные с точкой $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ векторы

$$(x - x_0),\ (y - y_0),\ (z - z_0),\ (t - t_0) \tag{8}$$

на *пространственноподобные* и *времениподобные*. Вектор называется пространственноподобным, если для него $f > 0$, т. е. если он направлен в «плоскую» часть мира, вне конуса (1), и времениподобным, если для него $f < 0$. В промежуточном случае, когда вектор направлен по образующей конуса, $f = 0$, мы называем его *сингулярным*. И мы приходим к иначе выраженному закону инерции квадратичных форм, когда усматриваем, что в четверке вещественных сопряженных диаметров гиперконуса (1) всегда 3 пространственноподобных, 1 времениподобный.

5. С $\sqrt{f}$ как расстоянием между двумя мировыми точками мы попадаем в область общего аффинного мероопределения. Так, «длина» пространственноподобного вектора вещественная, времениподобного чисто мнимая, сингулярного равна нулю. Для точек фундаментальной структуры (3) расчет дает расстояние от любой точки пространства $\frac{0}{0}$. Два вектора, исходящие из $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$, называем перпендикулярными друг другу при их сопряженности по отношению к (1), т. е. когда каждая лежит в полярной плоскости другой.

### *b*) Простейшие положения геометрии бесконечно малых

1. Предположим, что точки $x$, $y$, $z$, $t$ и $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ близки между собой. Вектор (8) тогда заменяется просто на

$$dx,\ dy,\ dz,\ dt. \tag{9}$$

Квадратичная форма (1) превращается в квадрат элемента дуги

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2. \tag{10}$$

Если же это отрицательная величина, используем, как уже намечено в (3) предыдущего параграфа,

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}, \tag{11}$$

где $d\tau$ (по Минковскому) означает уже элемент *собственного времени*. Принимаем еще при этом, что $ds$ или $d\tau$ смотря по тому, которая из этих величин вещественна, если не равны нулю, должны быть положительны. Естественно, для векторов (9) в зависимости от $ds^2 \gtreqless 0$ употребляем названия пространственноподобных, времениподобных и сингулярных. Гиперконус, образованный сингулярно направленными векторами:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0, \tag{12}$$

в свете последующих операций с бесконечно малыми принято называть конусом Монжа (Monge), поскольку Монж в своих основополагающих «Приложениях анализа к геометрии» («Application de l'analyse á la geometrie»)[1] впервые показал, как трактуются подобные пучки направлений с позиций теории нелинейных дифференциальных уравнений. Сингулярные направления у нас еще будут предметом специального рассмотрения.

2. У произвольных кривых, проведенных в мире $x$, $y$, $z$, $t$, будем различать пространственноподобные, времениподобные, возможно, и сингулярные куски; для первых будем говорить о длине $s = \int ds$, для времениподобных кусков о собственном времени $\tau = \int d\tau$ (с произвольными пределами интегрирования внутри куска).

3. Также и «направление» кривой в каждой ее точке устанавливается посредством или

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad z' = \frac{dz}{ds}, \quad t' = \frac{dt}{ds}, \tag{13}$$

или

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\tau}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{d\tau}, \quad \dot{t} = \frac{dt}{d\tau}, \tag{14}$$

причем соответственно

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 1 \quad \text{или} \quad \dot{t}^2 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} = 1. \tag{15}$$

Аналог «кривизны» дается вторыми производными

$$x'', y'', z'', t'' \quad \text{или} \quad \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}. \tag{16}$$

[1] Впервые опубликовано 1808. Новое комментированное издание, предпринятое Лиувиллем (= «5 издание»), 1850, в которое, наряду со многими различными интересными деталями, включены также гауссовы Disquisitiones circa superficies curvas (Исследования искривленных поверхностей, 1827), так сказать, является библией современной дифференциальной геометрии, служа фундаментом того многообразного развития этой дисциплины, которое составляет заслугу всех наций. Ср. раздел II второй главы т. 1.

При этом

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' - c^2t't'' \quad \text{или} \quad \dot{t}\ddot{t} - \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{c^2} = 0. \tag{17}$$

Векторы направления и кривизны, следовательно, всегда перпендикулярны друг другу.

«Радиусом кривизны» будет служить обратная величина квадратного корня

$$\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - c^2t''^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{\ddot{t}^2 - \frac{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}{c^2}}. \tag{18}$$

4. Важно убедиться, что пространственноподобные или времениподобные *прямые линии* мира одновременно являются его *геодезическими*, т. е. дают решения вариационных задач

$$\delta\overline{\underline{\int}} ds = 0 \quad \text{или} \quad \delta\overline{\underline{\int}} d\tau = 0. \tag{19}$$

Небольшой расчет проведем только для пространственноподобных линий. Запишем в этом случае (19) подробнее:

$$\delta\overline{\underline{\int}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2}\, ds = 0, \tag{20}$$

а $x$, $y$, $z$, $t$ здесь выражаются как произвольные функции $s$ с фиксацией только границ. По правилам вариационного исчисления это дает:

$$\frac{d\left(\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2}}\right)}{ds} = 0, \ldots$$

и далее, привлекая (15), напрямик интегрируем: сначала

$$x' = \alpha, \quad y' = \beta, \quad z' = \gamma, \quad t' = \delta,$$

затем

$$x = x_0 + s\alpha, \quad y = y_0 + s\beta, \quad z = z_0 + s\gamma, \quad t = t_0 + s\delta,^1 \tag{21}$$

что совпадает с (44), с. 119. Для сингулярных прямых вариационный принцип отказывается служить, при промежуточном расчете в знаменатель входит выражение $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2}$, равное в данном случае нулю. Если мы позже и сингулярные прямые называем геодезическими,

[1] Причем, естественно, параметры выбираются в соответствии с $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-c^2\delta^2 = 1$.

то лишь подразумевая, что они образуют переход от пространственно-подобных геодезических к времениподобным.

5. Хотя бы бегло надо осветить еще вопрос о семействах геодезически эквидистантных гиперповерхностей, приобретший значение в более поздних исследованиях. Еще Гаусс в своей цитированной выше основополагающей работе 1827 ввел в рассмотрение случай семейств кривых, ортогональные траектории к которым — геодезические линии; кривые такого семейства всегда геодезически эквидистантны. В основе этих понятий у Гаусса, естественно, стоит какая-то знакоопределенная форма $ds^2$. Бельтрам и в 1869 распространил эту теорию на $n$-мерные пространства с произвольно задаваемой знакоопределенной формой $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Строятся при этом, естественно, $n-1$-мерные эквидистантные многообразия. Не предусмотренным там моментом оказывается неопределенный характер нашей $ds^2$ (10), так что мы должны различать пространственноподобные и времениподобные семейства гиперповерхностей, отводя еще особую роль промежуточному переходному случаю. Пространственноподобным мы называем семейство гиперповерхностей, если ортогональные ему геодезические тректории времениподобные, и наоборот. С другой точки зрения, наш случай особенно прост, так как геодезические линии у нас прямые.

Центральный для нас пункт этой теории истолковывается так, что условие геодезической эквидистантности семейства поврехностей

$$F(x,\, y,\, z,\, t) = k \tag{22}$$

задается несложным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = K, \tag{23}$$

причем положительное $K$ характеризует случай пространственноподобных геодезических, отрицательное $K$ времениподобных (в то время как $K = 0$ дает пока исключенный сингулярный случай). Мерой куска ортогональной траектории, которая исходит из произвольной точки поверхности $F = k_1$, до встречи с $F = k_2$ является длина

$$s = \frac{|k_1 - k_2|}{\sqrt{K}} \tag{24}$$

или соответственно собственное время

$$\tau = \frac{|k_1 - k_2|}{c\sqrt{-K}}. \tag{24$'$}$$

Это делается отчетливее на простом примере семейства концентрических сфер из элементарной геометрии, где надо задать $F$ формулой:

$$F = \sqrt{K\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - c^2(t-t_0)^2\right]}. \tag{25}$$

$c$) **Дифференциальное уравнение** $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = 0$

Ясно, что предшествующее уравнение определяет такие гиперповерхности

$$F(x,\, y,\, z,\, t) = 0, \tag{26}$$

которые в каждой своей точке касаются исходящего из нее конуса Монжа $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0$. Чтобы приблизиться к способу рассуждений Монжа, подразумеваем, что (26) решено относительно $t$, и пишем:

$$t - \Phi(x,\, y,\, z) = 0. \tag{27}$$

Введя еще обозначения

$$\frac{\partial t}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = r,$$

переписываем наше дифференциальное уравнение в форме:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{28}$$

Также и $t - \Phi = \mathrm{const}$, наряду с исходным (27), удовлетворяют ему. В напрашивающемся примере исходной фигурой является все тот же гиперконус $f = 0$ при точке $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$, его уравнение мы должны сейчас писать как:

$$t - \sqrt{\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{c^2}} = t_0. \tag{29}$$

Но одновременно уравнению (28) удовлетворяют все гиперплоскости, касающиеся такого конуса (или, что безразлично, фундаментального эллипсоида), т. е. гиперплоскости

$$\nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu_4 t + \nu_5 = 0$$

с

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0$$

(ср. выше уравнение (4)).

Общая теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, насколько она далее используется у нас, создана в случае трех переменных Лагранжем, а Коши (1819) распространена на $n$ переменных. Монж присоединил к этому, сперва для 3 переменных, геометрическое истолкование (смотри его сочинение 1808, цит. на с. 130), которое Ли около 1870 распространил на $n$ переменных и принципиально расширил, используя как геометрические образы не только «точки» $x$, $y$, $z$, $t\ldots$ интегрального многообразия, но и его «элементы» $x$, $y$, $z$, $t, \ldots, p$, $q$, $r, \ldots$. Вместо каких-либо «кривых» на интегральном многообразии встречаются тогда «полосы», как это уже отмечалось выше.

Из обширной затронутой математической области мы — принимая во внимание будущее использование — выделяем единственный фрагмент, чтобы разъяснить его на дифференциальном уравнении в частных производных (28). Это понятие *характеристик* (как говорил Монж) или соответственно, при способе выражения Ли, *характеристических полос*. Оставаясь с 4 переменными $x$, $y$, $z$, $t$, мы, однако, будем обращаться с дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка как с заданным в общем виде

$$\Omega(x, y, z, t, p, q, r) = 0. \tag{30}$$

Итак, речь идет о полосе, для нее известна система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} dx\colon dy\colon dz\colon dt\colon dp\colon dq\colon dr = \frac{\partial\Omega}{\partial p}\colon \frac{\partial\Omega}{\partial q}\colon \frac{\partial\Omega}{\partial r}\colon \\ \colon \left(p\frac{\partial\Omega}{\partial p} + q\frac{\partial\Omega}{\partial q} + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\colon -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} + p\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)\colon \\ \colon -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y} + q\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)\colon -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z} + r\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right). \end{gathered} \tag{31}$$

«Свойство полосы» при этом обеспечивается очевидной связью

$$dt - (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = 0.$$

Тогда имеет место следующая примечательная теорема: любое интегральное многообразие (30) (вообще говоря, трехмерное, поскольку всех переменных у нас 4) накрывается $\infty^2$ характеристических полос; все интегральные многообразия (30) мы получаем, объединяя каждый раз такие $\infty^2$ характеристических полос, которые касаются какой-нибудь произвольно выбранной гиперповерхности (последняя может в специальных случаях сводиться к двумерной поверхности, кривой или даже отдельной точке). Полное решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (30) приводится, следовательно, к совокупности решений обыкновенных дифференциальных уравнений (31).

Нет возможности обосновать здесь эту теорию, но зато можно ее применить к конкретному дифференциальному уравнению в частных производных (28). Строим уравнения его характеристических полос

$$dx\colon dy\colon dz\colon dt\colon dp\colon dq\colon dr = p\colon q\colon r\colon (p^2+q^2+r^2)\colon 0\colon 0\colon 0, \tag{32}$$

где, согласно (28), $p^2+q^2+r^2$ надо заменить на $\frac{1}{c^2}$. С другой стороны, $p$, $q$, $r$ оказываются постоянными. Представим ради примыкания к более ранним выкладкам:

$$p = \frac{\alpha}{c^2\delta}, \quad q = \frac{\beta}{c^2\delta}, \quad r = \frac{\gamma}{c^2\delta}, \tag{33}$$

тогда в силу (28): $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-c^2\delta^2 = 0$. В итоге интегрирование уравнений (32) дает

$$x = x_0 + \frac{\alpha(t-t_0)}{\delta}, \quad y = y_0 + \frac{\beta(t-t_0)}{\delta}, \quad z = z_0 + \frac{\gamma(t-t_0)}{\delta}. \tag{34}$$

Это в точности те полосы, которые создаются образующими (6) гиперконуса (1) с соответствующими им касательными плоскостями (7). Иначе выражаясь: характеристические кривые совпадают с сингулярными прямыми (которые мы называем также сингулярными геодезическими линиями), а приписанные к их точкам гиперплоскости — с исходящими через эти кривые касательными плоскостями к фундаментальному эллипсоиду.

---

Наконец, распространим ту же теорию на более общее дифференциальное уравнение в частных производных (23). С этой целью перейдем в пространство 5 измерений $x$, $y$, $z$, $t$, $u$ и будем искать гиперповерхности этого пространства, задаваемые уравнением

$$u = F(x, y, z, t). \tag{35}$$

Если опять применять краткую запись частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \pi, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \varkappa, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \varrho, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \sigma,$$

то указанное дифференциальное уравнение представляется в форме:

$$\pi^2 + \varkappa^2 + \varrho^2 - \frac{\sigma^2}{c^2} = K. \tag{36}$$

Для соответствующих характеристических полос получаем, слегка сократив выкладки:

1. Дифференциальные уравнения:

$$dx\colon dy\colon dz\colon dt\colon du\colon d\pi\colon d\varkappa\colon d\varrho\colon d\sigma = \pi\colon \varkappa\colon \varrho\colon -\frac{\sigma^2}{c^2}\colon K\colon 0\colon 0\colon 0\colon 0. \tag{37}$$

2. Затем, если постоянные здесь значения $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$, $\sigma$ обозначать через $\frac{\alpha}{\sqrt{K}}$, $\frac{\beta}{\sqrt{K}}$, $\frac{\gamma}{\sqrt{K}}$, $\frac{c^2\delta}{\sqrt{K}}$, а под $s$ понимать некоторый подходящий параметр:

$$x = x_0 + \alpha s,\ \ y = y_0 + \beta s,\ \ z = z_0 + \gamma s,\ \ t = t_0 + \delta s,\ \ u = u_0 + \sqrt{K} s. \tag{38}$$

Устраним отсюда уравнение для $u$, стало быть, «спроектируем» кривую (38) пятимерного пространства на употребительное у нас четырехмерное пространство $x$, $y$, $z$, $t$. Тогда получаем в точности уравнения (21) пространственноподобных и времениподобных геодезических линий «четырехмерного мира»[1]. Эти геодезические линии оказываются, следовательно, проекциями характеристических кривых пятимерного пространства. Одновременно $u - u_0$ есть не что иное, как взятая с коэффициентом $\sqrt{K}$ длина отрезка геодезической кривой до текущей точки.

Прояснению этих отношений способствует также то, что с фиксацией четверки $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$, $\sigma$ интегрирование уравнения (36) по характеристической полосе становится в близкую связь с употреблявшимися в b) приемами интегрирования геодезических линий. Многообразие же $u = F(x, y, z, t)$ в $R_5$ интерпретируется достаточно наглядно в рамках $R_4$ через семейство «уровенных поверхностей», вдоль каждой из которых $F$ постоянно. Если $F$ — какое-либо из решений (36), эти уровенные поверхности в $R_4$ геодезически эквидистантны и т. д. Это вид начертательной геометрии, позволяющий исследовать отношения в $R_5$ посредством $R_4$.

Эти связи, очень интересные сами по себе и расходящиеся от уже названного в разные стороны, я все же не могу прослеживать дальше. Снова встретимся мы с ними при более поздних экскурсах в аналитическую механику[2].

[1]Здесь и ниже будем писать $t$ вместо $l$ и в соответствии с этим изменяется также $\delta$.

[2]Смотри замечание 3, с. 86

## § 3. Физические дополнения к нашей картине мира с дальнейшими геометрическими объяснениями

Для полного обоснования точки зрения современной физики я должен в некоторых направлениях усовершенствовать выкладки и рассуждения предыдущих параграфов.

### *a*) Более близкое знакомство с основными физическими понятиями

Речь идет о двух положениях, совместимых, правда, с предшествующими соображениями, но не вытекающих из них непосредственно.

Первое положение таково, что физики, несмотря на все те радикальные изменения, которые внес принцип относительности группы Лоренца в наши представления о пространстве и времени, должны сохранять понятие *различия прошлого и будущего* по отношению к какой-либо точке отсчета. Точнее сказать: допускать можно только такие подстановки (10), при которых рост $t$ при фиксированных $x$, $y$, $z$ сопровождается ростом $t'$, при которых, следовательно, коэффициент $\alpha_{44}$ положителен! Совместимость такого постулата с релятивистскими идеями, как мы их здесь представляем, обеспечивается тем, что вещественные подстановки (11) с положительным $\alpha_{44}$ сами по себе образуют группу[1].

Более того, ограничение положительными $\alpha_{44}$, которого мы в дальнейшем придерживаемся, есть по существу условие, чтобы выбранные вещественные подстановки Лоренца составляли континуум.

В связи с этим ограничением, каждый из определенных в (1), с. 127 конусов

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0$$

можно, как называл Минковский, разложить однозначно на *предшествующий конус* (Vorkegel) и *последующий конус* (Nachkegel) (из которых первый принадлежит «предыдущему миру» ($t<t_0$), второй — «последующему миру» ($t>t_0$)). И на каждой времениподобной кривой (а также, конечно, на каждой сингулярной кривой) можно определить положительное направление, ведущее в каждой точке кривой из предыдущего мира в последующий мир.

---

[1]Это очень изящно получается при сравнении с другим представлением подстановок, посредством бикватернионов в формуле 11 § 1. Именно, расчет дает для коэффициента $a_{44}$ значение

$$\frac{A_1^2+B_1^2+C_1^2+D_1^2+A_2^2+B_2^2+C_2^2+D_2^2}{A_1^2+B_1^2+C_1^2+D_1^2-A_2^2-B_2^2-C_2^2-D_2^2}, \tag{1}$$

где числитель положителен по своей структуре ($A_1\ldots A_2\ldots$ вещественны), а знаменатель представляет собой норму обоих кватернионов $Q_1\pm\varepsilon Q_2$. При комбинировании наших подстановок перемножаются соответствующие $Q_1\pm\varepsilon Q_2$. Это влечет за собой и умножение их норм. Следовательно, и т. д.

Теперь, однако, следует второе физическое ограничение в развивавшемся до сих пор ходе мыслей: Из обычной физики должно перениматься понятие материальной точки, которая с течением времени остается сама собой, как принято говорить, идентичной — будь то частица весомого вещества или электрон. Когда говорят, что какая-то точка произвольно движется в пространстве, мы — опять вслед за Минковским — чертим *мировую линию*, которую описывает на четырехмерном множестве $x$, $y$, $z$, $t$. Далее мы постулируем, что, в смысле обычного словоупотребления, скорость материальной точки никогда не должна быть $> c$. Это значит, что мировая линия всегда времениподобна и только в предельном случае становится сингулярной[1] — Мы должны представить достаточное число таких линий, пробегающих в четырехмерном мире одна вблизи другой (без взаимных пересечений) в соответствии с различаемыми нами материальными точками, так что любое физическое событие можно выразить в терминах взаимоотношений между этими мировыми линиями. Мы будем при этом придерживаться обычного *принципа причинности*, т. е. предполагать, что всегда только прошлое влияет на будущее, но не наоборот. Выбрав на мировой линии I какую-нибудь определенную позицию, построим соответствующий ей предшествующий конус, тогда в ней присутствуют влияния только того куска другой мировой линии II, который попадает внутрь этого конуса или на самую его поверхность. При этом легко доказывается, что при времениподобном характере линии II на ней найдется только одна точка, в которой II пересекается с предшествующим конусом, построенным из данной позиции на I. Если, в частности, предположить, — я возвращаюсь на момент к традиционному способу выражения, — что из различных точек II исходит воздействие, распространяющееся со скоростью света $c$, то упомянутая точка пересечения как раз и будет единственной на II , способной быть источником влияния на данную позицию на I. Такое место на II Минковский называет благодаря этому свойству световой точкой, относящейся к заданной позиции на I.

Ту бóльшую определенность, которую приобретают наши физические представления за счет этих постулатов, мы прúменим здесь только для пополнения прежних данных о четырехмерном потенциале поля, испускаемого равномерно движущимся электроном. Электрон должен двигаться со скоростью $< c$. Для произвольной мировой точки $x$, $y$, $z$, $t$, согласно только что сказанному, на мировой линии электрона можно

---

[1]Чем больше скорость (при обычном способе выражения) материальной точки $x$, $y$, $z$, тем ближе к пространственной плоскости проходит ее мировая линия. Каждый кусок мировой линии дает свое «собственное время». Смелая идея Эйнштейна состояла в том, что часы, сопровождающие материальную точку, сами собой должны регистрировать это собственное время.

найти ровно одну световую точку $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ (причем $t_0 < t$). Далее, согласно формуле (14) на с. 130 мы можем говорить о соответствующих компонентах направления $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, $\dot{t}_0$ (которые у равномерно движущегося электрона, естественно, имеют одни и те же значения вдоль всей его мировой линии). При этом $\dot{t}_0$, согласно принятой теперь договоренности, $> 0$. Компоненты искомого четырехмерного потенциала, которые на с. 121, формула (47), могли быть определены только с точностью до знака, сейчас устанавливаются полностью:

$$q_x = -\frac{e\dot{x}_0}{c^2P}, \quad q_y = -\frac{e\dot{y}_0}{c^2P}, \quad q_z = -\frac{e\dot{z}_0}{c^2P}, \quad q_t = +\frac{e\dot{t}_0}{P}, \tag{2}$$

где значения $P$ всегда положительны:

$$P = \dot{t}_0(t - t_0) - \frac{\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) + \dot{z}(z - z_0)}{c^2}. \tag{2'}$$

Обоснованием служит тот факт, что $x$, $y$, $z$, $t$ лежит на последующем конусе по отношению к $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$. Подробности последующих расчетов я опускаю и хочу только указать, что эти формулы по существу совпадают с теми несимметрично выписанными, которые в свое время (как указано на с. 121) составили Ленард и Вихерт для случая электрона, движущегося к а к у г о д н о с досветовой скоростью. Что при этом получаются те же самые формулы (2) как в случае равномерно движущегося электрона, это замечательный факт, который удостоверяет теория дифференциальных уравнений в частных производных, правда, если углубиться в нее чуть дальше, чем мы это можем сделать в следующих параграфах. Сравни хотя бы представление во вновь называемой работе Зоммерфельда 1910 года.

### *b*) Дальнейшие геометрические объяснения

Снова подчеркнем ту замечательную гармонию, которая существует между ранее накопленным запасом идей математической теории и современным аппаратом математической физики. Не могу удержаться, чтобы не вникнуть еще в два пункта, в которых опять обнаруживается эта гармония. Речь идет о геометрических приемах рассуждения, которые на протяжении 1869/1871 были разработаны, отчасти при непосредственным сотрудничестве, Дарбу, Ли и мною самим. Для сравнения можно прочесть хотя бы статьи Ли и мои в т. 5 Math. Ann. (1871) или резюмирующее изложение в т. 1 моих литографированных лекций по высшей геометрии (1893)[1].

[1]Смотри ссылку 1, с. 44.

### 1. Отображение четырехмерного мира $x$, $y$, $z$, $t$ на сферы трехмерного пространства $x$, $y$, $z$

Мы просто заменяем точку $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ тем сечением, которое исходящий из этой точки гиперконус

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0 \tag{3}$$

имеет с трехмерной плоскостью $t = 0$. Это сфера с центром в $x_0$, $y_0$, $z_0$ и с радиусом $\pm ct_0$. Соотношение становится полностью однозначным, если мы будем еще различать сферы положительного и отрицательного радиуса (так называемые «ориентированные сферы»), как это обычно делается в «геометрии сфер» Ли (а также у Лагерра и других современных геометров).

Чем становится мировая линия $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ при таком переводе на язык другой геометрии? Семейством сфер или, если выражаться еще физичнее, сферических световых волн с центрами, которые задаются поочередными положениями $x_0$, $y_0$, $z_0$ движущейся точки. Пока $t_0 < 0$ (прошлое), мы имеем дело со световыми волнами, стягивающимися к своему центру, а при $t_0 > 0$ — с волнами, исходящими из центров. Между прочим, как в семействе $t_0 < 0$, так и в семействе $t_0 > 0$ сферы окружают друг друга (без пересечений в вещественных точках).

Для многих удобнее работать именно с такими образами вместо четырехмерного точечного пространства ($x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$). Так предлагал и Тимердинг (Timerding) в № 21 Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 1912. Но и Бейтмен их уже использует на с. 79 цитировавшегося сочинения 1909, замечая при этом, что подстановки $G_{15}$, переводящие $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0$ в себя, переводят также пары касающихся одинаково ориентированных сфер в пары с теми же свойствами и наоборот. Поэтому он называет указанные преобразования «spherical wave transformations»[1].

### 2. Группа Лоренца как предельный случай более общей группы

Согласно общим установкам Кели 1859, как это изложено в четвертой главе т. 1, группу Лоренца с относящимся к ней «аффинным» мероопределением можно рассматривать как проективно принадлежащую приведенной в (4), с. 127, структуре второго класса

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0. \tag{4}$$

[1]Бейтмен, вообще говоря, со своей точки зрения прекрасно ориентировался в литературе. Но здесь он упустил из виду, что эти сферические преобразования фактически и формально совпадают с таковыми у Ли.

Там было отмечено, что она вырождена из-за нулевого определителя (поскольку у нас вообще-то было 5 переменных). Для образованного геометра не видно препятствия, почему бы на этом месте не взять более общую структуру

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} + \frac{\nu_5^2}{R^2} = 0, \tag{5}$$

из которой (4) получается как предельный случай при $R = \infty$. Тогда соответственно в однородных точечных координатах двух уравнений (3) с. 127 мы имеем единственное основополагающее квадратное уравнение

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - c^2\xi_4^2 + R^2\xi_5^2 = 0. \tag{6}$$

Выбрав подходящую единицу измерения расстояний, мы устанавливаем и общее «расстояние между двумя точками» при соответствующем проективном мероопределении

$$R \cdot \arccos\left(\frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 - c^2\xi_4\eta_4 + R^2\xi_5\eta_5}{\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + R^2\xi_5^2}\,\sqrt{\eta_1^2 + \ldots + R^2\eta_5^2}}\right), \tag{7}$$

которое можно преобразовать в

$$R \cdot \arcsin \frac{\sqrt{D_{\xi\eta}}}{\sqrt{\xi_1^2 + \ldots}\,\sqrt{\eta_1^2 + \ldots}}, \tag{8}$$

где $D_{\zeta\eta}$ обозначает дважды окаймленный определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi_3 & \eta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 & 0 & \xi_4 & \eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^2 & \xi_5 & \eta_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Эта формула (8) вместе с (9) приведена здесь потому, что она в более явном виде, чем (7), показывает, как переход $R = \infty$ ведет к понятию расстояния для группы Лоренца. Действительно, при $R = \infty$ из (8) получается

$$\frac{\sqrt{(\xi_1\eta_5 - \xi_5\eta_1)^2 + (\xi_2\eta_5 - \xi_5\eta_2)^2 + (\xi_3\eta_5 - \xi_5\eta_3)^2 + (\xi_4\eta_5 - \xi_5\eta_4)^2}}{\xi_5\eta_5}, \tag{10}$$

а это по возвращении к неоднородному способу записи оказывается не чем иным, как хорошо известным выражением

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2}.$$

Я бы не стал включать в рассмотрение этот побочный вопрос, если бы Эйнштейн в своей новейшей публикации (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, февраль 1917) о космологических изысканиях не пришел, правда, в не совсем завершенной форме, но по сути дела точно к определению (7)[1]. У него возникла мысль так модифицировать «образ мира» группы Лоренца, чтобы получился мир, бесконечно протяженный во времени, но не в пространстве. Как раз определением (7) это точно достигается (как должны понимать геометры без особых моих разъяснений, речь идет о том, чтобы, в смысле моей прежней терминологии, «параболическое» мероопределение случая Лоренца заменить на «эллиптическое»).

## § 4. История интегрирования дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\ldots-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0$

Мы уже свели введением четырехмерного потенциала интегрирование уравнений Максвелла к системе уравнений

$$\Box q_i = 0.$$

Соответственно речь теперь у нас пойдет об отдельном уравнении

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

которое можно назвать уравнением трехмерных колебаний; оно всегда занимает центральное положение, когда заходит речь о проблемах колебаний трехмерных (изотропных) сред. Его мы встречаем еще в 1759 в исследованиях Эйлера по распространению звука[2].

[1]Как сам Клейн написал на этом месте в рукописи, это указание неточно. Формула (7) должна сопоставляться со вкладом де Ситтера (de Sitter), а не Эйнштейна. Ср. F. Klein: Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt (Об интегральной форме законов сохранения и теории пространственно замкнутого мира). Gött. Nachr, 1918. S. 394 = Собр.соч. т. 1, с. 586 (*Ред).*

[2]Полное издание трудов, 3. Serie, Bd. 1, S. 480.

Полное историческое осмысление последующего исторического развития возможно, конечно, только если опираться, с одной стороны, на уравнение одномерных колебаний

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0,$$

с другой стороны, на дифференциальное уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0.$$

Для обзора с той и другой точек зрения богатый материал доставляют вышедшие до сих пор части Мат. энциклопедии, в особенности, из-под пера Буркхардта; сравни также пространный доклад Буркхардта в т. 10; 2, a, b Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung (1908).

Здесь можно охарактеризовать только, так сказать, персональную сторону исторического развития (которое растянулось уже более чем на 150 лет). Оно перевернуто в сравнении с теми теориями, которые мы пока что обсуждали в связи с группой Лоренца. Там в предыстории мы обнаруживаем чисто математическую спекуляцию и с ней возможность для математической физики, если она хочет поступать экономно, использовать для своих целей в готовом виде наличные последовательности идей. Обратное положение с представленными здесь дифференциальными уравнениями. Здесь математическая физика своими силами заложила фундаментальные принципы, и чистые математики только задним числом стали разрабатывать точные условия, при которых эти принципы работоспособны.

Что касается теории интегрирования уравнения (1), мы будем говорить сперва о фундаментальном решении, т. е. таком, которое имеет в пространстве $x$, $y$, $z$ по возможности простую точечную сингулярность и на бесконечности не дает оснований для претензий. Для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

таковое получается, когда сингулярной точке $x_0$, $y_0$, $z_0$ приписывают какую-нибудь массу $\omega$; это, как известно,

$$\frac{\omega(x_0, y_0, z_0)}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + \ldots + (z-z_0)^2}$ или, если еще представить себе массу $\omega$ зависящей от времени $t$,

$$\frac{\omega(x_0, y_0, z_0, r_0)}{r}.$$

В сходной, только немного усложненной форме получается фундаментальное решение (1)

$$\frac{\omega\left(x_0, y_0, z_0, t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \tag{2}$$

ныне называемое *запаздывающим* потенциалом (мы ищем для подстановки в предыдущую формулу массу сингулярной точки в «уже прошедший» момент $t - \frac{r}{c}$). В принципе это решение содержится уже в работах Пуассона (Poisson), которые я готов сейчас привести; современное же написание я встретил как впервые употребленное во втором издании книги Пуанкаре Electricité et Optique, Paris 1901 (с. 455, где, впрочем, автор относится к нему как известному).

В том остальном, что касается теории интегрирования (1), пусть мне будет позволено перечислить следующие ее основные шаги:

1. На первом месте стоят работы Пуассона с 1808 по 1819 год. Прежде всего он получил формулу, помогающую проследить за распространением со временем какого-нибудь начального возмущения, пространственно заданного при $t = 0$. Он комбинирует члены, относящиеся к тем точкам пространства $x_0, y_0, z_0$, для которых $t - \frac{r}{c} = 0$[1], притом выражаемые, смотря по надобности, самим фундаментальным решением (2) или его производной по $t$. Соответственно, общая формула составляется как сумма двух двойных интегралов[2].

2. На формулу Пуассона можно смотреть как на специальный случай решения «задачи с граничными условиями». Действительно, многообразие $t = 0$, на котором даны $F$ и $\frac{\partial F}{\partial t}$, можно понимать как границу «полумира» $t > 0$ («положительного полумира», как любил выражаться Минковский), для которого ищется решение. Но прошло целых 40 лет, пока Гельмгольц («Теория звуковых колебаний в трубах с открытыми концами». «Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden», 1859, Grelles Journal Bd. 57), привлекая в особенности методы, развитые Грином для теории потенциала, не взялся за более общие задачи с

[1]Это «световые точки» по отношению к $x$, $y$, $z$, $t$.

[2]Они приводятся во всех подходящих руководствах по математической физике, например, Рэлей (Rayleigh «Theory of sound», London, первое и второе издание 1877/78 и 1894).

граничными условиями. К тому же кругу идей, только еще более приближаясь к четырехмерной форме, принадлежит знаменитое обоснование Кирхгофом принципа Гюйгенса (Berliner Sitzungsberichte 1882). Там речь идет об определении $F$ в цилиндрической мировой области, основанием которой служит какая-нибудь область пространства, а образующие параллельны оси $t$.

3. Большой материал далее содержится в только что цитированной «Теории звука» Рэлея. Между прочим, там анализируется тройной интеграл

$$\iiint \frac{\omega\left(x_0, y_0, z_0, t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, dx_0\, dy_0\, dz_0, \tag{3}$$

распространенный на предшествующий конус произвольной мировой точки $x$, $y$, $z$, $t$; показано, что (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -4\pi\omega, \tag{4}$$

откуда можно обратно извлечь фундаментальное решение (2) и понять принцип его использования в формуле Пуассона. Такое же развитие, с точки зрения электромагнитной теории, позднее выступает между прочим у Лоренца: электромагнитная теория Максвелла. (La théorie électromagnetique de Maxwell, Leyden, 1892.)

4. К данным пункта 2 непосредственно примыкает их приложение к нуждам акустики, при котором подставляют

$$F = \varphi(x, y, z)e^{ikt}, \tag{5}$$

вследствие чего место (1) занимает дифференциальное уравнение в частных производных только с 3 независимыми переменными:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{k^2}{c^2}\varphi = 0. \tag{6}$$

Из относящейся обширной сюда литературы рекомендую написанную по моему побуждению монографию Покелса (см. сноску на с. 97), а также интересный реферат Зоммерфельда в т. 2 A7c Математической энциклопедии (1900), который тем временем тоже уже превзойден современным развитием науки.

5. В цитированных здесь источниках при обсуждении задач с граничными условиями речь заходит не только о применении фундаментального решения (1) и его обобщения «функций Грина» задаваемых областей, но также о методе разложений в ряды, который предписывает в применении к (1), опираясь на (5), искать для каждой области бесконечное семейство частных решений

$$F_i = \varphi_i(x) \cdot \chi_i(y) \cdot \psi_i(z) \cdot \omega_i(t), \tag{7}$$

чтобы образовать требуемое решение в форме

$$F = \sum c_i F_i. \tag{8}$$

Французский исследователь Ламе значительную часть своей жизни посвятил стоявшим в его время в центре интересов дифференциальным уравнениям в частных производных, изучая их с отмеченной выше стороны. Рассмотрев его наследие, я смог указать формальный общий закон для многочисленных разложений в ряды в трехмерной теории потенциала, сравни примыкающую сюда книгу Бохера (сноска на с. 97). Отсутствовало еще доказательство сходимости рассматриваемых рядов, но его доставили современные исследования. Нет сомнений в возможности соответствующего прогресса методики (7) и (8) также для рассматриваемого здесь уравнения[1].

Помня, что это уравнение в частных производных (1) переходит в себя не только при подстановках десятипараметрической группы Лоренца, но и при подстановках пятнадцатипараметрической группы, мы получаем в свое распоряжение целый ряд методов, чтобы строить подходящие частные решения для (1) и с ними также решение уравнений Максвелла[2].

[1]При разложениях в ряд в теории потенциала нигде не употребляют гипергеометрическую функцию в таком общем виде, как ее определяли Гаусс и Риман, а всегда только ее частные и предельные случаи (сферические функции, бесселевы функции и т. д.). Напротив, с дифференциальным уравнением (1) при целесообразной постановке задачи дело обстоит иначе, как становится ясно из упомянутых здесь формальных разработок. Действительно, относящиеся сюда формулы дает Бейтмен в т. 7 серии 2 Proceedings der London Mathematical Society (1909) (Ближе к нашему времени сводки по данной теме: Н. Я. Виленкин. *Специальные функции и теория групп*. М.: «Наука», 1965; Г. Бейтмен, А. Эрдейн. *Высшие трансцендентные функции*, т.I—III. М.: «Наука», 1965; У. Миллер. *Симметрия и разделение переменных*. М., «Мир», 1981. Аргументы функций $\varphi$, $\chi \dots$ в (7), конечно, только в очень частном примере совпадают с самими исходными $x$, $y$, $z$, $t$, а в большинстве случаев это — криволинейные координаты. — *Прим. перев.*)

[2]Вероятно, очень интересно было бы рассмотреть, насколько широко эти методы способны включать практически встречающиеся случаи и, соответственно, насколько поддаются объяснению разработки таких отдельных случаев у физиков. Однако здесь невозможно отвлекаться на такие вопросы.

## § 5. Элементарная оптика, в особенности геометрическая оптика как первое приближение для уравнений Максвелла

В этом параграфе я хочу раскрыть, как общая оптика, т. е. система приемов общего интегрирования уравнений Максвелла, при подходящих условиях в трехмерной подстановке переходит в обычные правила элементарной, волновой или геометрической, оптики.

Общая оптика, как только что сказано, имеет дело с дифференциальными уравнениями

$$\Box q_i = 0, \quad \operatorname{div} q = 0. \tag{1}$$

Переход же к обычной волновой оптике осуществляем, подставив

$$q_i = c_i e^{\frac{2\pi\varepsilon c}{\lambda}\left(t-\varphi(x,\,y,\,z)\right)} \quad (\varepsilon = \sqrt{-1}), \tag{2}$$

где «длина волны» $\lambda$ рассматривается как достаточно малая величина, чтобы мы имели право во всех встречающихся уравнениях отбрасывать низшие степени $1/\lambda$ в сравнении с высшими.

Тогда соответственно из каждого уравнения $\Box q_i = 0$ получается

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{3}$$

*Это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка* (28) с. 133. Если $\varphi$ — решение (3), то поверхности

$$t = \varphi(x,\, y,\, z) + \text{const} \tag{4}$$

в трехмерном пространстве для различных значений $t$ представляют отдельные световые волны общего волнового пакета. Это — в элементарном смысле — эквидистантные поверхности с общей системой нормалей, причем расстояние между двумя поверхностями, соответствующими значениям $t_1$ и $t_2$, будучи измерено вдоль любой такой нормали, составляет $c|t_1 - t_2|$. Сами нормали мы называем световыми лучами, принадлежащими данному волновому пакету. Они являются проекциями геодезических линий («характеристик»), из которых сплетаются многообразия (4) в пространстве $x,\, y,\, z,\, t$.

Последнее понятие относится к арсеналу геометрической оптики. Чтобы прийти к полностью волновой оптике, используем условие дивергенции (1)

$$c_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{c_4}{c^2} = 0 \tag{5}$$

и с его помощью рассчитываем по формуле (14) с. 127 электрический вектор $(X, Y, Z)$ и магнитный вектор $(L, M, N)$. Находим таким образом:

$$X = \frac{2\varepsilon\pi}{\lambda} e^{\frac{2\varepsilon\pi c}{\lambda}(t-\varphi)} \cdot \left(c_1 + c_4\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \quad \text{и т. д.,} \tag{6}$$

$$L = \frac{2\varepsilon\pi}{\lambda} e^{\frac{2\varepsilon\pi c}{\lambda}(t-\varphi)} \cdot \left(c_2\frac{\partial\varphi}{\partial z} - c_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \quad \text{и т. д.} \tag{7}$$

Отсюда выводим тождество

$$L\frac{\partial\varphi}{\partial x} + M\frac{\partial\varphi}{\partial y} + N\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

и, принимая во внимание (5), также:

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + Z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Это значит, что как электрическое, так и магнитное колебания происходят в плоскости, касательной к волновой поверхности. Далее:

$$XL + YM + ZN = 0; \tag{10}$$

и колебания обоих видов взаимно перпендикулярны.

Наконец, рассчитываем еще:

$$X^2+Y^2+Z^2 = L^2+M^2+N^2 = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2-\frac{c_4^2}{c^2}\right)e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)}, \tag{11}$$

в результате чего по формуле (48) с. 122 получается значение удельной энергии поля:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2 c^2}\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2-\frac{c_4^2}{c^2}\right)e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)}. \tag{12}$$

Вектор же Пойнтинга ((48), там же), который в силу (9), (10) направлен вдоль световых лучей, в сторону движения волн, имеет длину[1]:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2 c}\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2-\frac{c_4^2}{c^2}\right)e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)}. \tag{13}$$

Этих несложных построений достаточно: я охотно признаю, что на точный предельный переход, ведущий от (1) к (3), мое внимание обратил только уже Дебай (Debye).

[1]Формулы (12) и (13) дают не совсем то, что надо: не регулярную удельную энергию и ее поток, а их короткопериодические флуктуации. При правильном расчете надо сразу вместо выражения (2) брать его сумму с комплексно сопряженным, см., например, М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики*. М., «Наука», 1970. перев.

# С. О приспособлении механики к теории относительности группы Лоренца

Теперь, когда мы не только располагаем группой Лоренца самой по себе, но и до некоторой степени освоили ее основополагающее значение в электродинамике, речь пойдет о том, чтобы и классическую механику, которая в рамках нашего представления в разделе А была согласована с принципом относительности группы Галилея—Ньютона, так преобразовать, чтобы получилось уже согласование с принципом относительности группы Лоренца. Предпосылка возможности такого перехода кроется в том упоминавшемся ранее свойстве группы Лоренца, что при $c \to \infty$ она превращается в группу Галилея—Ньютона.

## § 1. Предельный переход от группы Лоренца к группе Галилея—Ньютона

Переход к группе Галилея—Ньютона обычно показывают на специальном преобразовании Лоренца, которое выше (стр. 89) мы писали так:

$$x' = \frac{x + cqt}{\sqrt{1-q^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{\frac{qx}{c} + t}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Фиксируя здесь $cq = v$ и пренебрегая членами $\frac{v^2}{c^2}$ и $\frac{vx}{c^2}$, получаем

$$x' = x + vt, \, y' = y, \, z' = z, \, t' = t, \tag{1}$$

а это — подстановка Галилея—Ньютона. Здесь следовало бы распространить такой же предельный переход на все операции, составляющие группу Лоренца. Но можно здесь в это не вдаваться, а просто сослаться на представление группы Лоренца с помощью бикватернионов, где после подстановки в роли $\varepsilon^2$ не $-\frac{1}{c^2}$, а 0, как раз и выступает группа Галилея—Ньютона, см. формулы на стр. 107.

При этом, как уже говорилось (стр. 73), группа $G_{10}$ четырехмерного мира перестает быть примитивной, поскольку многообразия

$$t = \text{const} \tag{2}$$

лишь переставляются между собой. Прежние «конусы Монжа», задаваемые соотношением $dx^2 + \ldots - c^2dt^2 = 0$, переходят в элементы $dt^2 = 0$, двукратно вкладывающиеся в вышеуказанные многообразия. В связи с этим совершенно изменяется и характер «аффинного» мероопределения группы Лоренца. Уравнение «фундаментального эллипсоида», которое на стр. 128 имело вид

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2-\frac{\nu_4^2}{c^2}=0$$

в плоскостных координатах, переходит теперь в квадратное уравнение (ранга 3) с двойным нулем определителя:

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=0. \tag{3}$$

В точечных координатах представление этого вырожденного образа достигается не менее чем 3 уравнениями:

$$\xi_4=0,\quad \xi_5=0,\quad \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=0, \tag{4}$$

он является не чем иным, как сферической окружностью обычной трехмерной метрической геометрии, воспринятой как образ четырехмерного мира. Выражение для временно́го «расстояния» двух элементов:

$$\sqrt{(t_1-t_0)^2-\frac{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}{c^2}}$$

вырождается теперь в

$$t_1-t_0, \tag{5}$$

и если $t_1-t_0$ исчезает, только тогда получается расстояние, выраженное обычным образом:

$$\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}, \tag{6}$$

которое сохраняет инвариантный смысл.

Представления о мировых линиях, пронизывающих четырехмерный континуум $x$, $y$, $z$, $t$ и имеющих при этом определенную направленность, можно, естественно, по-прежнему придерживаться. Элемент

$$d\tau=\sqrt{dt^2-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2}}$$

превращается просто в $dt$, так что отпадает необходимость различать «собственное время» материальной точки и «время просто». На месте «направляющего вектора» мировой линии (стр. 131), именно $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$, оказывается теперь

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},\ 1, \tag{7}$$

а на месте ее вектора кривизны $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$ (см. там же)

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2},\ 0. \tag{8}$$

С этой расстановкой указаний обычное представление у меня так видоизменяется, что на первый план выходят систематизированные комплексы понятий, которым заранее ожидается соответствие при обращении к группе Лоренца. Это мне кажется удобнее, чем искать правильную по Лоренцу формулу исходя из традиционных понятий с подходящими добавлениями ad hoc[1].

---

[1]Позвольте мне еще точнее осветить этот предмет на примере скалярного понятия радиуса кривизны: для него я уже дал на стр. 131 формулу:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\ddot{t}^2 - \frac{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}{c^2}} \tag{9}$$

(этот вариант $\varrho$ имеет размерность «времени» и дает мнимые значения на любой временин-подобной мировой линии). В качестве параметра, по которому идет дифференцирование, взятое «собственное время» на данной мировой линии. Если вместо него ввести какой-нибудь другой параметр, а производные от $x$, $y$, $z$, $t$ по нему временно отмечать штрихами, (9) заменяется более общей формулой:

$$\frac{1}{\varrho} = c\sqrt{\frac{(x'x''+y'y''+z'z''-c^2t't'')^2-(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2)(x''^2+y''^2+z''^2-c^2t''^2)}{(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2)^3}} \tag{10}$$

(которая в случае использования собственного времени сводится к (9)). Выберем теперь систему координат $x$, $y$, $z$, $t$ таким специальным образом, чтобы касательная к мировой линии в рассматриваемой точке совпала с осью $t$ и поэтому $x'$, $y'$, $z'$ представлялись равными 0 (следовательно, «приводим частицу в состояние покоя», как это уже было названо по Минковскому на стр. 117). Система координат пусть далее будет так повернута вокруг оси $t$, чтобы обратились в нуль $x''$, $y''$. Наконец, в качестве параметра мировой линии назначим само $t$ во введенной таким образом системе координат. Это дает:

$$t' = 1, \quad t'' = 0, \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Из формулы (10) следует

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{i}{c}\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{11}$$

Здесь $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ совпадает с тем, что Минковский назвал *ускорением из состояния покоя* данной материальной точки. Само это выражение можно найти у многих авторов. Но мне кажется гораздо убедительнее ставить на первом месте формулу (9) или (10).

## § 2. Динамика точечной массы

Динамику изолированной точечной массы мы развиваем точно так же, как это уже делалось на стр. 117 для электрона, приписав частице скалярную массу $m$, введя в рассуждения действующую «четырехмерную силу»

$$P_x,\ P_y,\ P_z,\ P_t,$$

которая обязана быть когредиентным[1] вектором, и положив

$$m\ddot{x} = P_x, \quad m\ddot{y} = P_y, \quad m\ddot{z} = P_z, \quad m\ddot{t} = P_t. \tag{1}$$

Поскольку имеет место равенство

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} - c^2\dot{t}\ddot{t} = 0,$$

для компонентов силы всегда должно подразумеваться наложенное на них соответствующее условие: четырехмерная сила перпендикулярна (в смысле нашего мероопределения) направляющему вектору данной точечной массы, т. е.

$$\dot{x}P_x + \dot{y}P_y + \dot{z}P_z - c^2\dot{t}P_t = 0. \tag{2}$$

Мы тождественно удовлетворим равенству (2), если, опираясь на принцип, действующий для электрона (стр. 118), введем сейчас чисто формально 6 величин, $X, Y, Z, L, M, N$ как функции положения $x, y, z, t$ частицы, чтобы было

$$\begin{cases} P_x = \dfrac{M\dot{z} - N\dot{y}}{c} + X\dot{t}, \\[2ex] P_y = \dfrac{N\dot{x} - L\dot{z}}{c} + Y\dot{t}, \\[2ex] P_z = \dfrac{L\dot{y} - M\dot{x}}{c} + Z\dot{t}, \\[2ex] P_t = \dfrac{X\dot{x} - Y\dot{y} + Z\dot{z}}{c^2}. \end{cases} \tag{3}$$

В частности, будем говорить о четырехмерном потенциале, если можно, как тогда, эти 6 величин представить как большой вихрь неко-

[1] Относительно этой терминологии ср. ссылку 1 стр. 195. — *Прим. ред.*

торого 4-вектора. С аргументами $x$, $y$, $z$, $t$ пишем соответствующие формулы по образцу уже дававшихся на стр. 126, именно:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{c}\frac{\partial q_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial q_t}{\partial x}, & Y = \frac{1}{c}\frac{\partial q_y}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial q_t}{\partial y}, \quad Z = \frac{1}{c}\frac{\partial q_z}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial q_t}{\partial z}, \\ L = \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z}, & M = \frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y}. \end{cases} \tag{4}$$

Прежде всего, здесь, кажется, не возникает непременной необходимости подчинять $q_x$, $q_y$, $q_z$, $q_t$ еще и условиям $\Box q_i = 0, \operatorname{div} q = 0$, как это было в случае уравнений Максвелла. Но все равно постулаты (3), (4), как и на стр. 118, можно свести к единому «приниципу Гамильтона»

$$\delta \int\limits_{-}^{-} \left( \frac{cm}{2}(c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2) + (\dot{t}P_t + \dot{x}P_x + \dot{y}P_y + \dot{z}P_z) \right) d\tau = 0 \tag{5}$$

с примыкающими модификациями, о которых тогда шла речь.

Во всяком случае важнейшее в таких выкладках — это появление семейства 4 координированных уравнений движения (1). Если назвать

$$m\dot{x},\ m\dot{y},\ m\dot{z},\ m\dot{t} \tag{6}$$

4 *компонентами импульса*, то (1) можно прочесть как 4 импульсных соотношения:

$$d(m\dot{x}) = P_x d\tau,\ d(m\dot{y}) = P_y d\tau,\ d(m\dot{z}) = P_z d\tau,\ d(m\dot{t}) = P_t d\tau \tag{7}$$

и видеть в них точное выражение принципа инерции, известного по нашей обычной механике. Ее 3 импульсным соотношениям соответствуют, естественно, три первых выписанных равенства; весьма примечательно, что четвертое при предельном переходе к обычной механике дает непосредственно закон живых сил; тем самым с другой точки зрения получается то сопряжение этого закона с обычными импульсными соотношениями, которое уже обсуждалось ранее на стр. 74. Проверка расчетом проходит совсем просто. Напишем наше новое (четвертое) импульсное соотношение следующим образом:

$$d\left( m\sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} \right) = \frac{P_x dx + P_y dy + P_z dz}{c^2} \sqrt{1 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}} \tag{8}$$

(где $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, как всегда до сих пор, означают $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$, а $x'$, $y'$, $z'$, напротив, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; при преобразовании надо только использовать связь

$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}$). Пусть теперь место квадратных корней займут разложения в ряд, тогда получается:

$$d\left(\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \ldots\right) = (P_x dx + P_y dy + P_z dz)(1 + \ldots). \qquad (9)$$

Все члены, обозначенные здесь ..., должны исчезнуть при предельном переходе к $c = \infty$, в то время как $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ совпадут с $x'$, $y'$, $z'$, так что, действительно, получается обычный закон живых сил

$$d\left(\frac{m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2}\right) = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \qquad (10)$$

Аналогичная координация 3 импульсных соотношений с энергетическим соотношением в области действия уравнений Максвелла нам уже встречалась на стр. 123.

Для исторического восприятия механики, однако, получается примечательный вывод. Два столетия тому назад между картезианцами и лейбницианцами бушевал оживленнейший спор, является ли «количество движения» или «живая сила» более важным из основных понятий, иными словами, при современном способе выражения, следует отдавать первенство импульсным соотношениям или энергетическому. Сейчас мы поняли, что вообще никакого предмета для спора тут не было, что напротив, оба противника имели в виду одно и то же, только с разных точек зрения.

## § 3. К теории твердого тела

Значительную роль, которую понятие твердого тела играет в механике, не нужно даже особенно подчеркивать. Возникает мысль перенести это понятие каким-либо образом в механику Лоренца. Для многих физиков, правда, кажется почти само собой разумеющимся, что она исключает возможность найти всякий прямой аналог, так как с понятием твердости связывают идею мгновенной передачи воздействия внутри тела, что несовместимо с принципом относительности группы Лоренца. Мне кажется полезным прояснить эти вещи и проследить за смыслом попыток установления подобного аналога.

Твердое тело классической механики — это агрегат с самого начала синхронно связанных точек, который способен подвергаться каким-либо преобразованиям Галилея-Ньютона. Мы знаем, что множество этих преобразований оценивается как $\infty^{10}$, однако при предположенной одновременности начальных положений верно утверждение, что взятое твердое тело может принимать в четырехмерном пространстве $x$, $y$, $z$, $t$ только $\infty^7$ положений. Действительно, 3 комбинации

$$\varepsilon_1 t+\xi_1,\quad \varepsilon_2 t+\xi_2,\quad \varepsilon_3 t+\xi_3,$$

встречающиеся в относящихся сюда формулах (стр. 71), для точек, рассматриваемых каждый раз после выхода из начального положения с совпадающими $t$, должны постоянно приводиться просто к 3 членам. Это происходит из-за того, что многообразие

$$t=t_0 \tag{1}$$

не меняется по составу своих точек на трехкратно бесконечном множестве преобразований Галилея–Ньютона

$$\begin{aligned} x'&=x+\varepsilon_1(t-t_0),\\ y'&=y+\varepsilon_2(t-t_0),\\ z'&=z+\varepsilon_3(t-t_0),\\ t'&=t. \end{aligned} \tag{2}$$

Если не засчитывать время $t$, то затронутый здесь факт выражают в традиционной механике обычно как наличие у твердого тела 6 степеней свободы.

Теперь априори ясно, что это не находит себе никакого непосредственного аналога для группы Лоренца. В ней единственным преобразованием, оставляющим неизменным точечное многообразие (1), было бы

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t;$$

при общих же преобразованиях Лоренца (1) может переходить в $\infty^4$ положений

$$\alpha_4 x+\beta_4 y+\gamma_4 z+\varepsilon_4 t+\zeta_4=0. \tag{3}$$

Если бы мы захотели определить твердое тело как какую-нибудь систему точек, нанесенных на (1) или (3), к которой применяются полностью все подстановки Лоренца, то неизбежно для него в мире $x$, $y$, $z$, $t$ были бы доступны $\infty^{10}$ различных положений.— На этом пути дело обстоит совсем не так, как хотелось, и остается только задаваться вопросом, нельзя ли на подстановки Лоренца, предназначенные для конкретного твердого тела, наложить ограничительные условия, которые поддерживали бы известную аналогию с кинематикой в узком смысле.

В «кинематике в узком смысле» рассматривают множества $\infty^1$ положений, которые твердое тело может принимать одно за другим. Чтобы получить здесь образную картину, рассмотрим мировые линии, которые описываются отдельными точками твердого тела при таком «движении».

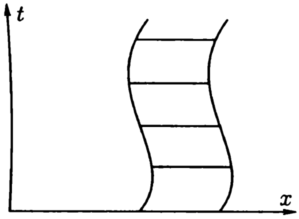


Рис. 1

На рисунке 1 при упрощающем предположении, что все эти мировые линии лежат в плоскости $x$, $t$, нанесены две такие мировые линии. Непосредственно ясно — мы остаемся пока с группой Галилея–Ньютона — что они из-за жесткости тела эквидистантны при измерениях в горизонтальном направлении и что эта эквидистантность есть единственное условие, которому они должны удовлетворять. Это условие можно выразить в несколько искусственной форме, но позволяющей обобщения. В мире $x$, $y$, $z$, $t$ с группой Лоренца будем называть какие-либо 2 направления ортогональными, если выполнено равенство:

$$dtd't - \frac{dxd'x + dyd'y + dzd'z}{c^2} = 0. \tag{4}$$

При $c = \infty$ оно переходит в тривиальное

$$dtd't = 0 \tag{5}$$

(что ясно и геометрически, когда конусы Монжа мира Лоренца мы заставляем превращаться в дважды засчитываемые плоскости $t = t_0$ мира Галилея–Ньютона). В последнем случае, следовательно, называем два направления взаимно ортогональными, если вдоль хотя бы одного из них $t = \mathrm{const}$ (т. е. на рисунке оно горизонтально). При этом способе выражения мы имеем право говорить, что в случае Галилея–Ньютона мировые линии любых двух точек твердого тела ортогонально эквидистантны[1].

Хотя эта формулировка очень произвольна, мы придерживаемся ее, чтобы определить позволенные движения твердого тела в случае группы Лоренца.

Так и было сделано сперва Борном в 1909 (Ann.d.Phys. [4] 30), а затем Эренфест (Ehrenfest. Physikalische Zeitschr. X, 1909), Герглоц и Фриц Нетер (Herglotz, Fritz Noether, Ann.d.Phys. [4] 31, 1910) вывели ближайшие следствия из этого постулата Борна. Именно, пусть мировые

[1]Сам угол, который мировые линии твердого тела в случае Галиея–Ньютона образуют с многообразиями $t = \mathrm{const}$, нельзя никоим образом считать именно равным $\frac{\pi}{2}$, но можно принимать произвольным. В самом деле, выражение угла между двумя направлениями

$$\arccos \frac{c^2 dtd't - dxd'x - dyd'y - dzd'z}{\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\sqrt{c^2d't^2 - d'x^2 - d'y^2 - d'z^2}},$$

действующее для группы Лоренца, при $c = \infty$ и одновременно $dtd't = 0$ становится неопределенным.

линии точек твердого тела будут и в случае Лоренца «нормально эквидистантными», тогда, как показал, в частности, Герглоц, для движения твердого тела возможны два случая:

($a$) Последовательность неограниченно длящихся изменений положения в четырехмерном мире образуется повторениями одного и того же бесконечно малого преобразования Лоренца.

($b$) Мировые линии различных точек твердого тела направлены для каждого положения тела перпендикулярно его несущему линейному многообразию.

Как пример к ($a$) мы можем задать винтовое движение:

$$\begin{aligned} x' &= \cos w \cdot x - \sin w \cdot y, \\ y' &= \sin w \cdot x + \cos w \cdot y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \qquad (w \text{ — параметр}) \qquad (6)$$

При трехмерном восприятии твердое тело тогда «вращается» с постоянной угловой скоростью вокруг оси $z$ (на месте которой можно, конечно, преобразованием координат поставить любую прямую). Напротив, ускоренное вращение и, в частности, начинающееся из состояния покоя было бы для нашего твердого тела невыполнимо, потому что мировые линии его точек, винтовые линии переменного шага, не могут быть нормально эквидистантными (как подтверждает расчет).

Большой интерес вызывает случай ($b$), который мы назовем нормальным движением. Хотя при этом и могут пропасть некоторые тонкости, мы намерены для его обсуждения использовать снова «ортогональные координаты»

$$x,\ y,\ z,\ l = ict$$

и так выражаться, рисуя при этом соответствующие чертежи, как если бы все эти величины были вещественны.

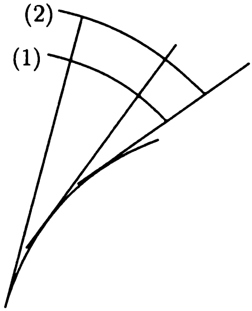

Рис. 2

Рисунок 2 снова освещает случай, когда $y$ и $z$ постоянны. Плоскостью рисунка, стало быть, является плоскость $x$, $l$. Мировые линии отдельных точек твердого тела выглядят тогда как ортогональные траектории какого-либо семейства прямых, т. е. представляют собой эвольвенты, принадлежащие представленной эволюте.

Что касается разнообразия ($a$) и ($b$), существует только $\infty^{10}$ движений типа ($a$) — поскольку лежащим в основе бесконечно малым преобразованием группы Лоренца определяется весь ход движения;— в случае же нормального движения для полного установления движения необходимо, чтобы была как-либо произвольно представлена мировая линия любой из точек твердого тела.

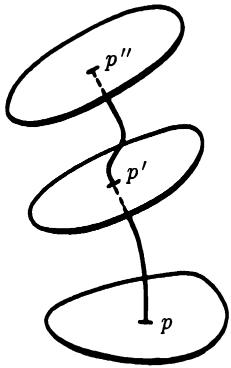


Рис. 3

Для наглядного понимания пусть снова послужит чертеж, на этот раз в пространстве $x$, $y$, $l$ (рисунок 3). Мы строим сначала мировую линию $P$, $P'$, $P''$, затем в качестве ее нормальных плоскостей видим те линейные многообразия, которые несут на себе точки твердого тела. Все другие мировые линии (и вместе с ними все движение твердого тела) определяются тогда однозначно как нормальные траектории семейства этих линейных многообразий.

Этим общий характер «нормальных движений» установлен, но мы хотим еще несколько дальше рассмотреть свойства их бесконечно малых преобразований и соответствующих конечных преобразований.

Зададим мгновенное положение твердого тела в плоскости $l = 0$. От $l = 0$ каждая точка твердого тела должна теперь подниматься вертикально, следовательно, для нее $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$. Поэтому бесконечно малое преобразование гласит (если мы сразу принимаем меры, чтобы оно было ортогональным):

$$\begin{aligned} x' &= x + 0 + 0 + \delta\varepsilon_1 \cdot l + 0, \\ y' &= 0 + y + 0 + \delta\varepsilon_2 \cdot l + 0, \\ z' &= 0 + 0 + z + \delta\varepsilon_3 \cdot l + 0, \\ l' &= -\delta\varepsilon_1 \cdot x - \delta\varepsilon_2 \cdot y - \delta\varepsilon_3 \cdot z + l + \delta\zeta_4. \end{aligned} \tag{7}$$

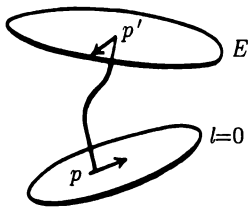


Рис. 4

Поскольку в нашем распоряжении 4 бесконечно малых инкремента ($\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\zeta_4$), то можно сказать:

Твердое тело обладает в случае ($b$) в бесконечно малом 3 степенями свободы.

Напрашивается ошибочное заключение, что при конечных перемещениях твердое тело может принимать только $\infty^4$ положений. Однако это не так. Напротив, оно может достичь любого положения, представимого преобразованиями Лоренца. Так как этот пункт в литературе не особенно обсуждался, я предлагаю вникнуть в него несколько ближе и ссылаюсь при этом на рисунок 4.

Я утверждаю: любую точку $P$ из $l = 0$ можно перевести (нормальным движением) в любую точку $P'$ и одновременно перевести «плоскость» $l = 0$, проходящую через $P$, в любую плоскость $E'$, проходящую через $P'$. Для этой цели я должен только протянуть от $P$ какую-нибудь кривую, перпендикулярную $l = 0$, так чтобы она входила в $P'$ перпендикулярно к $E'$, и эту кривую принять за мировую линию для $P$. Но можно больше! За счет большого произвола в выборе кривой $PP'$ я могу еще любой азимут, отмеченный при $P$ в плоскости $l = 0$, перевести в любой азимут при $P'$ в $E'$ (что на рисунке показано стрелками, исходящими из точек $P$ и $P'$).

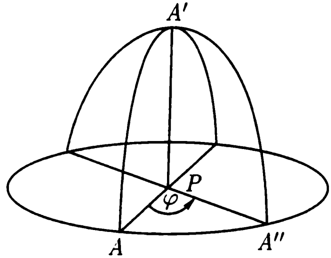


Рис. 5

Для доказательства достаточно проверить, что плоскость $l = 0$ с неподвижно закрепленной $P$ последовательностью нормальных движений можно в конце концов перевести в себя с поворотом на произвольный угол.

Чтобы это усмотреть, взглянем на рисунок 5. Сперва надо повернуть плоскость $l = 0$, задавая ось вращения исходным азимутом $PA$, пока плоскость не встанет перпендикулярно своему первоначальному положению, затем вращением вокруг перпендикуляра $PA'$ привести ее к новому азимуту $PA''$ и, наконец, вернуть ее в горизонтальное положение опять-таки поворотом на 90°, но на этот раз вокруг оси $PA''$.

Что число степеней свободы подобным образом не согласуется для конечного и для бесконечно малого, не должно особенно поражать. Герц в оставшейся после него Механике (цит. выше, стр. 86) разбирает обстоятельно нечто подобное для шара, катящегося по твердой подставке. Он обладает 3 степенями свободы в бесконечно малом, 5 при конечных перемещениях. Для такого поведения Герц изобретает термин, что условия, которые ограничивают подвижность шара в бесконечно малом, «неголономны». Наконец, сходная вещь хорошо известна математикам, занимавшимся теорией проблемы Пфаффа. Если я ставлю условие (чтобы оставаться при простейшем случае 3 переменных)

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

то этим точка $x$, $y$, $z$ лишь тогда оказывается привязанной к какой-либо определенной поверхности $F = \text{const}$, когда левую часть равенства можно умножением на некое подходящее $M$ привести к виду $dF$, что требует выполнения условия

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0;$$

в противном случае нашу точку можно привести в произвольное положение в пространстве.

Резюмируя, мы и в этой второй возможности движения твердого тела, совместимой с признанием группы Лоренца, в «нормальном движении», усматриваем мало сходства с тем, что привычно в случае группы Галилея-Ньютона. Чтобы обеспечить соответствие хотя бы в бесконечно малом, Борн в 1910 сформулировал иное предложение, выражающееся примерно так:

«Произвольное твердое тело обладает центром $p_0$, мировая линия которого все время перпендикулярна линейному многообразию (3), содержащему данное тело. Но вокруг этой центральной точки твердое тело может произвольно поворачиваться в своем многообразии».

Данное определение, если снова отправляться от линейного многообразия $l = 0$, допускает бесконечно малое преобразование с 7 бесконечно малыми инкрементами:

$$\begin{aligned}
x' &= x + \delta\chi \cdot y - \delta\psi \cdot z + \delta\varepsilon_1 \cdot t + 0\\
y' &= -\delta\chi \cdot x + y + \delta\varphi \cdot z + \delta\varepsilon_2 \cdot t + 0\\
z' &= \delta\psi \cdot x - \delta\varphi \cdot y + z + \delta\varepsilon_3 \cdot t + 0\\
t' &= -\delta\varepsilon_1 \cdot x - \delta\varepsilon_2 \cdot y - \delta\varepsilon_3 \cdot z + t + \delta\xi_4.
\end{aligned} \tag{8}$$

Но и так не удается справиться с парадоксами мира; при конечных перемещениях тело несомненно получает способность принимать $\infty^{10}$ положений, как и раньше.

Мне не известно, чтобы кто-либо дальше проследил этот предмет. Видимо, общее воззрение все больше становится таким, что понятие твердого тела, которое еще Герц делал фундаментом своей Механики, механика Лоренца удержать не в силах. И видно, какие изменения вторгаются в наши основные физические понятия.

## Заключительное замечание

Последние параграфы показывают, что в механике Лоренца многое надо так или иначе понимать по-другому, чем в классической теории. Где последняя кладет в основу передачу чего-то, не требующую времени, там как раз и возникает принципиальное отличие. Зато механика непрерывных сред непосредственно приспосабливается к группе Лоренца. Я необходимо ограничиваюсь тем, чтобы опять в этой связи указывать на важную работу Герглоца о теории упругости (Ann.d.Phys. [4], 36, 1911). Мы же сами, в соответствии с целью данного изложения, должны ограничиваться *элементарными началами* механики (как мы поступали и с электродинамикой). Наша задача не может быть в том, чтобы заменить учебник математической физики. Напротив, разговор склоняется к тому, чтобы почувствовать, как могут физики найти уже сформированными в готовом виде те вспомогательные математические средства, в которых они нуждаются в ходе своих современных спекуляций.

## Пояснения ко второй главе

1. Стр. 82: Образец операции «свертывание» или «упрощение» в исчислении Риччи. Ср. Эддингтон (см. стр. 237)

2. Стр. 85: Что уравнения электронной теории не могут быть окончательно правильными, следует уже из существования самих электронов, которое не удавалось понять на основании прежних уравнений поля. И вот пытались так изменить уравнения поля, чтобы электроны порождались их специальными решениями[1] (Ми, Эйнштейн, Гильберт, Вейль, Эддингтон). Все же на этом пути не достигнуто удовлетворительных результатов. Между тем классическая электронная теория была потрясена еще и с другой стороны, именно открытием квантовых явлений (Планк, Эйнштейн) и примыкающим к нему изучением структуры атома[2] (в особенности Бором). Исходный пункт при этом лежит, впрочем, со стороны не столько электродинамики, на которую еще дополнительно накладываются известные ограничения (условия квантования)[3].

3. Стр. 102: Результат применения «правила частного». Ср. Эддингтон (см. стр. 237), стр. 70–73.

4. Стр. 102: Добавление $\frac{1}{2}\delta_{ik}\Omega$ допустимо, потому что тензор когредиентен к только что данному тензору. Ср. примечание 4 к первой главе.

5. Стр. 110. Если бы в какой-то точке $\sum\limits_k \dfrac{\delta \mu_{ik}}{\delta x_k} = 0\,(i = 1, \ldots, 4)$ не выполнялось, можно было бы по образцу рассуждений, известных в вариационном исчислении, таким образом построить область интегрирования как окрестность данной точки, что интеграл будет отличен от нуля.

---

[1]Обзорное сообщение сделал В. Паули (W. Pauli) в своей работе по теории относительности в Enc. d. Math. Wiss. Bd. V (19), S. 749 и след. Смотри еще F. Jüttner Math.Ann.Bd.87, 1922; также работы Эйнштейна и Эддингтона.

[2]Резюмирующее изложение: (A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien. Braunschweig 1924) переиздавалась много раз, в том числе в русском переводе: А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры.

[3]Далее редакторы немецкого издания ссылаются на основополагающие работы по квантовой механике, значительная часть которых, ввиду их исторической важности, собрана в русском переводе в специальном выпуске УФН, 1977, т. 122, №4. Исторический аспект освещен также в выпуске, посвященном П. А. М. Дираку: УФН, 1987, т. 153, №1, в сборнике: Макс Планк. *К столетию со дня рождения*, М., 1958 и т. д. Близкие по характеру к данной книге теоретико-групповые и вообще математические стороны квантовой механики также обсуждались не раз. См., например, Е. Вигнер. *Теория групп*. М., 1961 или Х. Грин. *Матричная квантовая механика*. М., 1968. — *Прим. перев.*

# Глава 3

# Группы аналитических точечных преобразований с положенной в основу квадратичной дифференциальной формой[1]

## А. Общие лагранжевы уравнения классической механики. Предварительные замечания

До сих пор мы рассматривали только группы *линейных* подстановок произвольных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Дальнейший шаг вперед должен состоять в принятии во внимание групп *произвольных* подстановок

$$x_1 = \varphi_1(y_1 \ldots y_n), \ldots, x_n = \varphi_n(y_1 \ldots y_n). \tag{1}$$

Поскольку $x_1 \ldots x_n$ по большей части понимаются как точечные координаты $n$-мерного пространства, мы говорим просто о точечных преобразованиях. При этом у нас остается свобода выбора: либо закреплять координатную систему, а преобразовывать пространство вместе со структурами, вложенными в него; либо, что сперва удобнее, считать жестко закрепленным пространство $R_n$, но менять систему координат (так что в последнем случае соотношения (1) представляют «преобразование координат»).

Координаты $x_1 \ldots x_n$ или $y_1 \ldots y_n$ мы для дальнейшего считаем вещественными, а наши рассмотрения ограничиваем таким объемом пространства, внутри которого функции $\varphi$, для которых ради простоты предполагается аналитичность, остаются все время регулярными, притом с не обращающимся в нуль функциональным определителем[2]. Подстанов-

[1]Сравните с Примечанием 1 в заключение главы. — *Прим. ред.*

[2]Далее эти ограничения, если не требуется обратное, все время молчаливо подразумеваются.

ки (1) тогда однозначно обратимы внутри выделенной области, в соответствии с понятием группы, так что наряду с каждой подстановкой (1) в данной группе найдется и ей обратная. В то время как рассматривавшиеся нами до сих пор группы линейных подстановок содержат только конечное число параметров, теперь это число будет, вообще говоря, бесконечным. По большей части даже не требуется дальнейших ограничений на $\varphi_i$, помимо высказанных; соответственно мы говорим просто о группе всех точечных преобразований и обозначаем ее постоянно как $G_\infty$.

Все же с группой линейных подстановок $n$ переменных существует контакт такого рода, что сообразно (1) дифференциалы $dx_i$ преобразуются с помощью *однородных линейных* соотношений

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\delta\varphi_1}{\delta y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\delta\varphi_1}{\delta y_n}dy_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n &= \frac{\delta\varphi_n}{\delta y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\delta\varphi_n}{\delta y_n}dy_n, \end{aligned} \tag{2}$$

а символы дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, напротив, контрагредиентно к (2), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Собственно, это и есть исходный пункт всех дальнейших рассмотрений. В таком общем смысле мы примыкаем к теории инвариантов линейных подстановок, причем только нужно заметить с самого начала, что определитель линейной подстановки (2) или (3) — это не что иное, как функциональный определитель $x$ по отношению к $y$ — вообще говоря, не следует приравнивать 1, как это обычно делалось с определителем подстановки раньше.

Подходящими объектами нашего инвариантно-теоретического исследования оказываются после каких-либо (аналитических, однозначных в заданной области) функций $f(x_1 \ldots x_n)$ в первую очередь *дифференциальные формы*

$$F(x_1 \ldots x_n;\, dx_1 \ldots dx_n) \tag{4a}$$

или

$$F\left(x_1 \ldots x_n;\, \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \tag{4b}$$

однородные (в простейшем случае рациональные, целые и однородные) по отношению к дифференциалам или соответственно операторам дифференцирования — наряду с этим также более общие формы, которые содержат несколько сортов дифференциалов $dx_i$, $d'x_i, \ldots$, будучи однородны по каждому, или, наконец, содержат то и другое при связанных с этим условиях однородности.

Естественно, у нас нет намерения систематически развивать теорию таких инвариантных форм с положенной в основу $G_\infty$. Напротив, мы ограничиваемся сравнительно простыми принципами, но приобретшими особое значение для математической физики. Разобрав в основных чертах по возможности обстоятельно историческое становление этих принципов, как мы его понимаем, и их значение, мы надеемся извлечь из такого разбора кое-что полезное широким кругам.

Обратимся, однако, сперва к отдельной квадратичной дифференциальной форме:

$$\sum a_{ik} dx_i dx_k \tag{5}$$

($a_{ik}$ суть «в нашей области» однозначные, регулярно себя ведущие, аналитические функции от $x_1 \ldots x_n$; определитель из $a_{ik}$ там же везде отличен от нуля). С представленными ограничениями мы, очевидно, примыкаем к обсуждению в предыдущей главе, где фундаментальную роль играла специальная квадратичная форма

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \tag{6}$$

И, действительно, одно из наших главных намерений — проследить за переходом[1] в физике последних лет от низшей («специальной») теории относительности, основанной на группе Лоренца и выделяющей форму (6), к высшей («общей») теории относительности, которая связана с группой $G_\infty$ всех точечных преобразований и использует общую квадратичную дифференциальную форму 4 переменных. Положение вещей снова таково, что подходящий математический аппарат в основных чертах оказался давно сформированным и ждал только воплощения в новые физические идеи. Чтобы яснее это осветить, необходимо вернуться более чем на столетие назад к той классической формулировке, которую придал аналитической механике Лагранж в своем фундаментальном труде (Mécanique analytique, первое издание 1788).

## § 1. Введение лагранжевых уравнений с их группой $G_\infty$

Перечислим кратко главные пункты, от которых зависят наши построения. Где указано, пользуемся уже современной терминологией, не ограничиваясь, вообще говоря, расчетами самого Лагранжа.

1. Общие лагранжевы уравнения относятся к системам каких-либо точечных масс

$$m_i;\ x_i,\ y_i,\ z_i \tag{1}$$

[1] Это предполагалось в четвертой главе книги и не завершено. — *Прим. ред.*

с возможными связями в виде каких-либо «условных равенств»

$$\Phi = 0, \Psi = 0, \ldots \tag{2}$$

такого рода, что переменные $x_i$, $y_i$, $z_i$ внутри интересующей нас области представляются регулярными аналитическими функциями $n$ независимых параметров

$$q_1 \ldots q_n. \tag{3}$$

На каждую отдельную точку (1) пусть действует сила с компонентами $X_i$, $Y_i$, $Z_i$; разыскиваются дифференциальные уравнения, которыми при таких условиях должны удовлетворять $q_1 \ldots q_n$ как функции времени $t$.

2. Для составления формул, данных Лагранжем, как известно, требуется, с одной стороны, выразить *живую силу* системы

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{4}$$

через $q_\alpha$, $\dot{q}_\alpha$, с другой стороны, *работу*, которую совершают силы при виртуальном смещении точек приложения, именно,

$$\delta A = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \tag{5}$$

надо представить как $\sum P_\alpha \delta q_\alpha$. Уравнения движения выглядят тогда просто:

$$\frac{d\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - P_\alpha = 0. \tag{6}$$

3. Чтобы оценить исключительную важность этих уравнений, нужно еще себе уяснить (что у самого Лагранжа примечательным образом присутствует только где-то на заднем плане, но благодаря позднейшим добавлениям более или менее известно), что формулы, выражающие $x_i$, $y_i$, $z_i$ через $q_\alpha$, наряду с $q_\alpha$ вполне могут содержать и время $t$ (как, в частности, обязательно происходит, если условные равенства (2) со своей стороны уже содержат $t$)[1]. Правда, при расчете $\delta A$ время $t$ не входит в число варьирующих переменных, так что надо писать как всегда

$$\delta A = \sum P_\alpha \delta q_\alpha. \tag{7}$$

Но, естественно, эта зависимость от $t$ сказывается при расчете $T$ по полным производным $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$. Вообще говоря, в результате расчета функция $T$ поэтому предстает в форме:

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum b_\alpha \dot{q}_\alpha \tag{8}$$

[1]Со всеми этими указаниями текста полезно сравнить вводную статью тома 4 (Механика) Мат. энциклопедии: A. Voß, Die Prinzipien der rationellen Mechanik.

(под $a_{\alpha\beta}$, $b_\alpha$ понимаются функции от $q_\alpha$ и $t$). Наряду с членом, квадратичным по $\dot q$, выступает, следовательно, линейный член[1], который при раскрытии уравнения (6) доставляет нам дополнительные слагаемые, обычно связываемые с именами астронома Клеро (1742) или инженера Кориолиса (Coriolis 1832).

4. Доказательство уравнений (6) достигается достаточно естественно непосредственным перерасчетом уравнений движения, выписанных первоначально в терминах $x$, $y$, $z$. Но вместо этого пользуются по большей части вариационным принципом, который мы для этого здесь сформулируем, именно как требование

$$\bar{\underline{\int}}(\delta T + \delta A)dt = 0, \tag{9}$$

когда внутри интервала интегрирования $q_\alpha$ произвольно варьируются, а на границах их значения фиксированы[2].

В самом деле, нам надлежит только в члене

$$\bar{\underline{\int}} \delta T dt = \bar{\underline{\int}} \left(\sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right) + \sum\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\delta \dot q_\alpha\right)\right) dt \tag{10}$$

преобразовать второй компонент известным путем интегрирования по частям и привлечь определение $\delta A$ из (7), чтобы получить на основании (9) формулу

$$\bar{\underline{\int}} \left[\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\right)}{dt} + P_\alpha\right)\delta q_\alpha\right] dt = 0, \tag{11}$$

которая непосредственно приводит к уравнениям (6).

5. Поинтересуемся здесь, в каком смысле комплекс лагранжевых уравнений (6 инвариантен по отношению к произвольным преобразованиям параметров $q_\alpha$, точнее, по отношению к группе $G_\infty$ всех аналитических подстановок, регулярных в данной области:

$$\begin{array}{l} q_1 = \varphi_1(q_1' \ldots q_n', t') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n = \varphi_n(q_1' \ldots q_n', t') \\ t = t'. \end{array} \tag{12}$$

---

[1] Вообще говоря, в (8) должен еще присутствовать член, совсем не зависящий от $\dot q$. Но производные от него в (6) практически можно сразу включить в $P_\alpha$. Так появляются, например, центробежные силы. — *Прим. перев.*

[2] Исчезновение вариации на пределах интегрирования снова отмечается поперечными штрихами при знаке интеграла

Вариационный принцип дает на это точный ответ. При нашей подстановке вопроса в число сразу задаваемых и поэтому инвариантных величин попадают $T$ с $\delta T$, с другой стороны и $\delta A$. Следовательно, в той же степени инвариантно и подынтегральное выражение (11), т. е.

$$\sum \left( \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)}{dt} + P_\alpha \right) \delta q_\alpha. \tag{13}$$

Левые части уравнений (6) — не что иное, как взятые с обратным знаком коэффициенты при $\delta q_\alpha$ в вышеприведенном инварианте. Набор самих $\delta q_\alpha$ по аналогии с прежними рассмотрениями мы называем *вектором*. Коэффициенты же при $\delta q_\alpha$ составляют в таком случае *контрагредиентный* вектор, и инвариантность нашего комплекса уравнений проявляется просто в требовании *тождественного исчезновения некоторого контрагредиентного вектора*.

6. Наше рассуждение удается сделать независимым от, может быть, не вполне прозрачного интегрирования по частям. Это достигается, если член, отбрасываемый при интегрировании по частям, оставить под знаком интеграла, именно вместо (13) просто написать:

$$\delta T - \frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right) + \sum P_\alpha \delta q_\alpha \tag{14}$$

(это совпадает с (13), поскольку $\delta\dot{q}_\alpha = \delta\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{d\delta q_\alpha}{dt}$).

Выражение (14) инвариантно, потому что составлено из заведомых инвариантов группы (12).

Мы примыкаем точно к тому образу действий, с помощью которого сам Лагранж в своей Аналитической механике. I, третье издание, с. 326[1], приходит к своим общим уравнениям, исходя из принципа виртуальных перемещений, без использования вариационного исчисления. В самом деле, (я сохраняю при этом наши обозначения) уравнение, даваемое вышеназванным принципом,

$$\sum((X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i) \tag{15}$$

непосредственно преобразуется в следующее:

$$\sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) - \frac{d}{dt}\left(\sum m_i(\dot{x}_i\delta x_i + \dot{y}_i\delta y_i + \dot{z}_i\delta z_i)\right) + \\ + \delta\sum\left(\frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\right) = 0, \tag{16}$$

[1] Собр. соч., т. II.

где теперь левая часть очевидным образом соответствует (14). Господин Гойн (Heun), которому мы так много обязаны в понимании аналитической механики Лагранжа, говорит, что переход от (15) к (16) порождает *центральное уравнение Лагранжа*[1]. Одновременно он облек идейное содержание (16) в следующую выразительную форму: виртуальная работа сил, приложенных к системе, равна скорости изменения «виртуального действия», уменьшенной на виртуальное изменение живой силы.

## § 2. Группа $G_\infty$ лагранжевых уравнений и группа Галилея-Ньютона. Коперниканские и птолемеевы координаты

Эйнштейн, как известно, выступил с требованием придать всем законам природы такую форму, чтобы они оказывались не зависимыми от произвольных преобразований координат, служащих для фиксации мировой точки, т. е. $x$, $y$, $z$, $t$. Построения предыдущего параграфа позволяют распознать, в какой полной мере — в области механики — этому требованию удовлетворяют уже общие лагранжевы уравнения. С одной стороны, вклад Лагранжа, особенно в связи с заменой отдельной частицы на систему точек, предвосхищает постулат Эйнштейна, но, с другой стороны, остается в рамках обычных представлений в том смысле, что в уравнениях (12) время $t$ как один из необходимых объектов общего преобразования — это в самом деле новая физическая идея, принесенная с группой Лоренца современной электродинамики. Характернейшая заслуга Эйнштейна в том, что он возвел эту идею в ранг принципиально важных. В остальном, однако, не следует недооценивать достижений Лагранжа.

Ниже мы попытаемся прояснить вопрос, как же инвариантность лагранжевых уравнений по отношению к группе $G_\infty$, определенной посредством (12), сопрягается с той инвариантностью по отношению к группе Галилея–Ньютона, которую мы рассмотрели в предыдущей главе со специальным вниманием к проблеме многих тел в астрономии. Тогда мы составляли дифференциальные уравнения проблемы многих тел в обычных прямоугольных координатах небесной механики — скажем, в «коперниканских» координатах:

$$m_i \ddot{x}_i = -\varkappa^2 \sum_k m_i m_k \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^3} \quad \text{и т. д.} \tag{17}$$

Эти уравнения как таковые остаются неизменными при 10-параметрической группе линейных подстановок $x$, $y$, $z$, $t$, которую мы связали с

[1] Ср., например, Мат. энциклопедию IV, 11, стр. 447.

именами Галилея и Ньютона, но не при группе $G_\infty$ уравнений (12). Чтобы облегчить сравнение обеих групп, в группе $G_{10}$ Галилея-Ньютона, определенной на стр. 71, мы устраняем подстановку $t = \pm t' + \xi_4$, заменяя ее тождественной подстановкой. После этого мы имеем дело с меньшей группой $G_9$, которая является подгруппой и по отношению к $G_\infty$, данной посредством (12).

Теперь, взяв для рассмотрения $r$ небесных тел, представим $3r$ координат $x_i$, $y_i$, $z_i$ какими-либо функциями $t$ и $n = 3r$ параметров $q_1 \ldots q_n$.[1] Составление лагранжевых уравнений (6) в терминах этих $q_\alpha$ особенно просто, поскольку фигурирующие в (14) компоненты сил происходят от частных производных $-\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$, $-\dfrac{\partial U}{\partial y_i}$, $-\dfrac{\partial U}{\partial z_i}$ потенциальной энергии

$$U = -\varkappa^2 \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}; \tag{18}$$

мы должны только перевычислить это выражение $U$ через аргументы $q_i \ldots q_n$ и принять

$$P_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \tag{19}$$

И здесь, с инвариантно-теоретической точки зрения, мы сталкиваемся с вопросом: как следует понимать, что новые уравнения остаются неизменными не только при $G_9$, о чем мы только что сказали, но и при $G_\infty$ (12)? Очевидно пока только то, что мы должны заботиться о преобразовании в соответствии с уравнениями (12), наряду с $q_1 \ldots q_n$, также функций $T$ и $U$ как и их частных производных (по мере необходимости). Только имея дело с такой группой, расширенной вовлечением выражений $T$ и $U$ в процесс преобразования к новым $q'_\alpha$, а не просто с группой $G_\infty$ уравнений (12), можно говорить об инвариантности наших лагранжевых уравнений. Смотря по тому как выбирается преобразование, принимают тот или иной вид $T$ и $U$, а также дифференциальные уравнения, записанные через $q_\alpha$, $\dot{q}_\alpha$. В единой форме Лагранжа эти уравнения появляются только потому, что мы наряду с $q_\alpha$ используем в них символы $T$ и $U$.

При этом, наряду с $G_\infty$, группа $G_9$, естественно, также сохраняет свои права. Обозначим в общем виде подстановки последней при записи в исходных координатах

$$x_i,\ y_i,\ z_i, = S(t;\ x'_i,\ y'_i,\ z'_i).$$

Пусть далее определенная система параметров $q$ вводится формулами:

$$x_i,\ y_i,\ z_i = V(t;\ q_1 \ldots q_n),$$

[1] Т. е. $n$ имеет иной смысл, чем в разделе А гл. II, где оно означало просто число тел. — *Прим. перев.*

а решения относительно $q_1 \dots q_n$ этих уравнений обозначаются как

$$q_1 \dots q_n = V^{-1}(t;\, x_1,\, y_1,\, z_i, \dots, x_r,\, y_r,\, z_r).$$

Лагранжевы уравнения проблемы многих тел остаются неизменными не только в первоначальных координатах при действии группы $G_9$, но и в более общей записи через параметры $q_1 \dots q_n$, если $q_\alpha$ подвергаются преобразованиям, которые в легко понимаемой символике гласят:

$$q_1 \dots q_n = V^{-1} S V(t;\, q_1' \dots q_n'). \tag{20}$$

За вычетом этого частного класса для остальной области преобразований $G_\infty$ инвариантность выступает, как уже было сказано, только при «адъюнкции» (подключении) символов функций $T$ и $U$[1].

Важно сопроводить эти разъяснения некоторыми историческими экскурсами.

Астроному-наблюдателю естественно использовать прежде всего «птолемееву» систему координат, именно высоту и азимут светила с точки зрения наблюдателя, а также расстояние светила от местоположения наблюдателя. Чтобы в определенных так координатах записать уравнения движения для различных тел Солнечной системы, надо обратиться к общей схеме наших лагранжевых уравнений. Результат тогда получается, конечно, много сложнее приводившегося у нас представления в коперниканских координатах, и тем самым мы можем оценить, какой огромный прогресс был достигнут благодаря Копернику. Он сам чувствовал, вероятно, только большое упрощение той пространственной картины, в рамках которой можно было отныне чисто качественно упорядочить движения светил. После этого работы Галилея и Ньютона показали, что можно простейшим образом сформулировать и количественную сторону явлений в смысле действующих сил, т. е. по существу дать уравнения движения. Отсюда выросло все учение о планетных возмущениях. Но доказательная сила выведенных динамических принципов идет

---

[1]Обсуждаемое положение вещей можно вполне проиллюстрировать на простом примере, который подробно обсуждался в гл. I, стр. 36 и след. Там речь шла о взаимоотношении между инвариантами ортогональной и общей линейной групп. Произвольный ортогональный инвариант (остающийся неизменным как таковой при линейных подстановках, которые переводят $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ в себя) можно тотчас воспринять как инвариант общей линейной группы при надлежащей трактовке инвариантности, когда к системам основных переменных (комплексам) присоединяется квадратичная форма, конкретная структура которой получается из $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ при соответствующем общем линейном преобразовании. В геометрическом понимании это ведет к общему аффинному или также (если интерпретировать $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ как точечные координаты в $R_{n-1}$) к более общему «проективному» мероопределению Кели. — Параллелизм подобным вещам всегда можно найти при переходе от теории инвариантов какой-нибудь группы подстановок к теории инвариантов более широкой группы.

еще дальше, например, их достаточно, чтобы предсказать поведение известного маятника Фуко. Все это доступно для понимания прежде всего в рамках простой схемы с использованием коперниканских координат, но потом всегда для целей наблюдения преобразуется к птолемеевым координатам.

Требования Эйнштейна и общую интерпретацию лагранжевых уравнений не следует поэтому понимать так, словно совсем уж безразлично, какую систему координат использовать. Если бы даже общие лагранжевые уравнения были заранее известны, и тогда к числу больших достижений пришлось бы отнести, когда кто-нибудь открыл бы существование специальной системы координат, в которой дифференциальные уравнения проблемы многих тел принимают простую форму (17) и для которой вследствие этого группа Галилея–Ньютона, все время скрыто присутствующая в (20), выступает явно в линейном виде. Этот математический факт можно рассматривать как определение коперниканских координат с общей точки зрения.

## § 3. Упрощенные вариационные принципы, переход к геометрии

Если, как это имеет место в проблеме многих тел, компоненты $P_\alpha$ сил, действующих на нашу механическую систему, можно представлять как частные производные $-\dfrac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ от потенциальной энергии $U$ (которая, кроме $q_1 \ldots q_n$, может зависеть также еще от $t$), то вариационный принцип (9) преобразуется к форме, которую в Германии обычно называют *принципом Гамильтона*[1]:

$$\delta \int\limits_{-}^{-} (T - U)dt = 0. \tag{21}$$

Если дополнительно предложить, что ни в $T$, ни в $U$ время $t$ явно не входит, мы попадаем в точности в тот круг идей, который уже был обстоятельно представлен в пятой главе т. 1. Живая сила $T$ становится однородной квадратичной формой относительно $\dot q_\alpha$

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta} \dot q_\alpha \dot q_\beta, \tag{22}$$

и как следствие лагранжевых уравнений мы получаем интеграл живых сил

$$T + U = h, \tag{23}$$

[1]Собственно историко-литературные сведения см. в пятой главе т. 1.

с помощью которого (21) можно заменить вариационным принципом Якоби:

$$\delta \int\limits_{-}^{-} \sqrt{(h-U)\cdot T} - dt = 0. \tag{24}$$

Здесь еще фигурирует $t$, но только формально. Действительно, введя $dt$ под знак квадратного корня, имеем

$$\delta \int\limits_{-}^{-} \sqrt{\frac{1}{2}\sum (h-U) a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta} = 0, \tag{25}$$

так что траектории нашей системы в «пространстве $q$» совпадают с геодезическими линиями этого пространства, когда его «элемент длины» $ds$ задается формулой:

$$ds^2 = \sum \frac{h-U}{2} a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta. \tag{26}$$

Время же, в течение которого проходится какой-либо отрезок такой геодезической линии, определяется согласно (23) квадратурой:

$$t = \int \sqrt{\frac{\sum a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta}{2(h-U)}} = \int \frac{ds}{h-U}. \tag{27}$$

Наконец, полное примыкание к римановой геометрии $n$-мерного пространства мы получаем в частном случае постоянства $U$ вообще (так что на нашу механическую систему больше никакая «сила» не действует), если еще простоты ради принять $h - U = 1$. Траектории нашей системы совпадают тогда с геодезическими линиями $R_n$, элемент длины в котором равен просто

$$ds = \sqrt{\frac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta}, \tag{28}$$

в то время как $t$ согласно (27) совпадает просто с длиной пробегаемой дуги.

Эти общеизвестные вещи мы воспроизводим здесь только затем, чтобы прежде всего подчеркнуть, как те геометрические исследования Гаусса и Римана, к обсуждению которых мы ниже обратимся, вырастают из материнской почвы лагранжевых уравнений.

Задачу, которой нам далее предстоит заниматься, мы можем, впрочем, наметить следующим образом. Когда в (12) не допускается больше явное вхождение $t$, то в формулах подстановки

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1(q'_1 \dots q'_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ q_n &= \varphi_n(q'_1 \dots q'_n) \end{aligned} \tag{29}$$

мы усматриваем группу $G_\infty$ всех точечных преобразований пространства $R_n$ переменных $q$. Мы должны обсудить поведение дифференциальной формы $ds^2 = \sum a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta$ в смысле соответствующей теории инвариантов. При этом можно ради наглядности трактовать $ds$ как дифференциал дуги в $R_n$.

# В. Учение о внутренней геометрии двумерных многообразий на основе гауссовых Disquisitiones circa superficies curvas

## § 1. Первичная ориентировка

Гауссово большое сочинение, которое мы в предварительной форме уже обсуждали в первой главе т. 1 и которое послужит исходным пунктом наших дальнейших обсуждений, имело новаторское значение с самых разнообразных сторон. Выросшее из геодезических работ Гаусса и оплодотворенное его философскими спекуляциями о природе нашего пространства, это сочинение дало важнейший импульс теоретико-математической стороне всей дифференциальной геометрии.

Что касается исторических обстоятельств появления Disquisitiones, позвольте мне сослаться на только что вышедший тщательный ретроспективный анализ Штеккеля (Stäckel)[1]. Развитие теоретической стороны было сперва таково, что идеи Гаусса стали увязываться с высказанными еще Монжем в его Application de l'analyse à la géometrie, о чем свидетельствует, между прочим, осуществленное в 1850 Лиувиллем пятое издание «Application», в котором, наряду со многими комментариями самого Лиувилля, нашло место воспроизведение сочинения Гаусса[2]. Очень скоро потом дифференциальная геометрия как самостоятельная дисциплина испытала заботливый уход у всех культурных наций. Здесь достаточно указать на соответствующую статью в III, 3 Math. Enzyklopädie,

[1] Gauß, Werke, Bd. 10, IV.

[2] Ср. стр. 129.

а также в особенности на объемистые учебники, вышедшие к концу 19 столетия:

1. Содержательный четырехтомный труд Дарбу «Лекции по общей теории поверхностей» («Leçons sur la théorie générale des surfaces» Paris 1887—1896, 2 издание 1914), продолжение которого составляют вышедшие первым изданием в 1898, вторым в 1910 «Лекции об ортогональных системах и криволинейных координатах» («Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes») того же автора.

2. Учебник Бианки (Bianchi) «Lezioni di geometria differenziale» (Pisa 1894)[1], в немецком переводе издание 1899, второе, расширенное издание 1910, Lukat.

3. «Введение в общую теорию искривленных поверхностей» Кноблоха (Knoblauch. Die «Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen». Leipzig 1888), в 1913 расширенно изданные под более общим названием «Основы дифференциальной геометрии» («Grundlagen der Differentialgeometrie»)[2].

По этим указаниям можно было бы проследить целый веер различных интересных направлений, но здесь мы выделяем из них только вполне определенное. Гаусс в своем сочинении делает различие между *внешней* и *внутренней* геометрией поверхности, причем первая занимается формой поверхности в трехмерном пространстве, тогда как внутренняя геометрия выделяет для изучения только те признаки, которые остаются неизменными при произвольном «изометрическом» преобразовании поверхности. Подразумеваем, что координаты точки поверхности выражены через два параметра $u$, $v$. Расстояние между двумя бесконечно близкими точками поверхности вслед за Гауссом задаем формулой

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{1}$$

(где стоящая справа квадратичная дифференциальная форма положительно определена), и внутренняя геометрия поверхности занимается всеми соотношениями, извлекаемыми из этого положенного в основу $ds^2$, но инвариантными по отношению к произвольным заменам параметров $u$, $v$. Здесь мы просто имеем дело с геометрическим оформлением общей проблемы, поставленной в конце предыдущего раздела (стр. 173), для наинизшей размерности $n = 2$.

С этим геометрическим оформлением в нашем изложении открывается нечто новое. Гаусс молчаливо предполагает при этом, что из поверхности выкраивается подобие капюшона ограниченных размеров так,

---

[1]Расширенное итальянское издание в двух томах вышло в 1927—1930. — *Прим. перев.*

[2]Между тем вышло: Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Bd. 1, Berlin 1921; Bd 2, Berlin 1923. Ред. Русский перевод: В. Бляшке. *Введение в дифференциальную геометрию.* М. 1957. — *Прим. перев.*

что любые две точки могут соединяться только единственной геодезической (или, как он говорит, кратчайшей[1]) линией, и проводит идею обосновывать геометрию, в особенности тригонометрию, с использованием этих геодезических линий точно так же, как это делается на плоскости при использовании прямых линий. На место обычного расстояния между двумя точками тогда просто становится «геодезическое расстояние», т. е. длина соединяющей их геодезической линии.

Этим выкладкам можно еще придать некую абстрактную форму, отказавшись от представления, что поверхность проходит через трехмерное пространство, с которым она связана, и считая переменные $u$, $v$ просто какими-нибудь координатами на плоскости. Тогда мы рассматриваем (1) как определение элемента дуги в новой, искусственно создаваемой на плоскости, *квазигеометрии* (с которой больше даже нет речи о трехмерном пространстве). Геодезическую линию, связывающую две точки, мы определяем требованием, чтобы взятый вдоль нее криволинейный интеграл $\int ds$ достигал стационарного значения при закрепленных концах (обладал, следовательно, нулевой первой вариацией). Устанавливаемое таким образом значение интеграла и называют геодезическим расстоянием между обеими точками.

Так обрисованный, сам по себе бесцветный принцип обладает тем преимуществом, что внимание никак не отвлекается от эквивалента внутренней геометрии поверхности. Формально есть свобода выбирать при этом в роли $ds^2$ любые, даже неопределенные дифференциальные формы. Это мы используем в связи с последующими обобщениями у Римана и с развитием современной физики. Также обнаруживаются связь с механикой, если трактовать

$$\frac{1}{2}(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)$$

как «живую силу» точки, движущейся в плоскости $u$, $v$, с массой 1.

Оказывается еще замечательный параллелизм между развитием мыслей у Гаусса и одновременными работами Гамильтона о «системах лучей» (Transactions of the R. Irish Academy, ср. т. I, p. 194). Задолго до Гамильтона было известно, что траектория светового луча в какой-либо среде, оптическая плотность которой произвольно меняется от точки к точке, можно определить приравниванием нулю первой вариации некоторого интеграла, взятого вдоль луча (принцип Ферма). Если подын-

[1] Использование выражения «геодезическая линия» (по отношению к поверхности, на которую линии наносятся) идет от Штеккеля, Leipziger Berichte 1893: Zur Geschichte der geodätischen Linien (К истории геодезических линий), но только после Лиувилля (1850) стало общеупотребительным, хотя одновременно примечательно, что связь с геодезией, столь живая у Гаусса, в теоретической геометрии с тех пор совсем сошла на нет.

тегральное выражение этой задачи обозначить через $ds$, то $ds^2$ (для не обязательно изотропных сред) представляет собой какую-нибудь квадратичную определенную форму относительно дифференциалов $dx$, $dy$, $dz$ пространственных координат. Этим геометрическая оптика иллюстрирует механический принцип наименьшего (или, как осторожнее выражается Гамильтон, *стационарного*) действия. В этом месте Гамильтон рассматривает значение интеграла, взятого вдоль светового луча, как функцию обеих граничных точек. Ту совокупность правил, по которым этот интеграл изменяется при смещении концов, Гамильтон называют законом *переменного* действия[1].

В этих случаях, как и у Гаусса для $n = 2$, основной шаг сопряжен с переносом центра внимания сначала на понятие геодезического расстояния между двумя точками.

## § 2. О дифференциальных уравнениях геодезических линий

1. Для геодезических линий, соотнесенных с элементом дуги (1), мы имеем сперва дело с вариационным принципом

$$\delta \int\limits_{-}^{-} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = 0, \tag{2}$$

где по выбору можно рассматривать то $u$, то $v$ в качестве независимой переменной. Как объяснено на стр. 171–172, соотношение (2) эквивалентно

$$\delta \int\limits_{-}^{-} (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)dt = 0; \tag{3}$$

этим геодезические линии представляются как траектории точки, на испытывающей силового воздействия. Для определения геодезических линий получаем, следовательно, пару лагранжевых дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 2\frac{d(E\dot{u} + F\dot{v})}{dt} &= E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2, \\ 2\frac{d(F\dot{u} + G\dot{v})}{dt} &= E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2, \end{aligned} \tag{4}$$

[1]Это я уже обстоятельно разобрал в пятой главе т. I и, в частности, описал, как из данных положений явились поздние вклады в общую механику.

в раскрытом виде гласящих:

$$\begin{aligned} &2E\ddot{u} + 2F\ddot{v} + E_u\dot{u}^2 + 2E_v\dot{u}\dot{v} + (2F_v - G_u)\dot{v}^2 = 0, \\ &2F\ddot{u} + 2G\ddot{v} + (2F_u - E_v)\dot{u}^2 + 2G_u\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Постоянство живой силы выявляется, если умножить левые части соответственно на $\dot{u}$ и $\dot{v}$ и сложить; действительно, тогда получаем

$$\frac{d}{dt}(E\ddot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2) = 0.$$

Мы можем (ср. выше стр.171) конкретно положить

$$E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = 1. \tag{6}$$

Тогда $t$ совпадает с длиной дуги вдоль геодезической линии, а взятые по $t$ производные $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\ddot{u}$, $\ddot{v}$ также получают простое, чисто геометрическое истолкование.

2. После такой подготовки становится удобнее для названных производных обращаться не только к способу записи по Лейбницу $\dfrac{du}{dt}, \ldots, \dfrac{d^2u}{dt^2}, \ldots$, но и к умножению на стоящую в знаменателе степень $dt$, чтобы с *дифференциалами*

$$du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$$

можно было оперировать *непосредственно*. Так постоянно делалось в 18-м столетии, а в дифференциальной геометрии осталось обычным со времен Гаусса. Строгость обозначения нужных понятий при этом не претерпевает ущерба, но, видимо, удается избежать лишней тяжеловесности формул.

Соответственно умножим уравнения (5) на $dt^2$ и обозначим новые левые части через $2\Psi_u$, $2\Psi_v$:

$$\begin{aligned} 2\Psi_u &= 2Ed^2u + 2Fd^2v + E_u d_v^2 + 2E_v du dv + (2F_v - G_u)dv^2 \\ 2\Psi_v &= 2Fd^2u + 2Gd^2v + (2F_u - E_v)du^2 + 2G_u du dv + G_v d_v^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Поведение уравнений (5) по отношению к произвольным точечным преобразованиям на основе сказанного в $A$ § 1 (стр. 166–167) можно теперь охарактеризовать следующим образом:

*a*) Если под $\delta u$, $\delta v$ понимать произвольную «вариацию» параметров $u$, $v$, то сумма

$$\Psi_u\delta u + \Psi_v\delta v \tag{8}$$

инвариантна (и, стало быть, $\Psi_u$, $\Psi_v$ образуют вектор, контрагредиентный к $\delta u$, $\delta v$).

$b$) Раскрытие смысла этого утверждения достигается проще всего, если сообразить, что (8) можно переписать как лагранжево центральное уравнение:

$$d(Edu\delta u+F(du\delta v+\delta u dv)+Gdv\delta v)-\delta\left(\frac{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}{2}\right). \quad (9)$$

$c$) Дифференциальные уравнения геодезических линий эквивалентны требованию, чтобы выражение (9) исчезало для произвольно выбранных $\delta u$, $\delta v$ (принцип виртуальных сдвигов).

$d$) Как раз в последних пунктах непосредственнее всего представлен тот факт, что геодезические линии имеют значение, независимое от выбора системы координат, после адъюнкции дифференциальной формы $ds^2$.

## § 3. Простейшие утверждения и понятия гауссовых Disquisitiones при инвариантно-теоретическом подходе

Понятия и теоремы, вкратце сопоставленные ниже, в общем-то известны из учебников.

1. Инварианты, содержащие два когредиентных вектора $d$ и $\delta$ (т. е. $du$, $dv$ и $\delta u$, $\delta v$).

$a$) «Поляра»

$$P = Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v, \quad (11)$$

с помощью которой угол между обоими векторами выражается следующим образом:

$$\varphi = \arccos\frac{P}{ds\delta s} \quad (12)$$

$b$) Соответственно

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{EG-F^2}(du\delta v - dv\delta u)}{ds\delta s}, \quad (13)$$

и площадь треугольника, построенного на обоих векторах, дается тогда важной формулой

$$2\triangle = \sqrt{EG-F^2}(du\delta v - dv\delta u). \quad (14)$$

2. Инварианты, содержащие контрагредиентный вектор. Ограничимся здесь простейшим случаем задания (помимо $ds^2$) какой-нибудь функции $f(u, v)$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$$

представляют контрагредиентный вектор.

$a$) Обычная теория квадратичных форм предлагает в качестве простейшего инварианта ту самую величину, которую позднее Бельтрами (примыкая к терминологии, разработанной Ламе для математической физики) назвал *первым дифференциальным параметром* для $f$:

$$D_1(f) = -\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial f}{\partial u} \\ F & G & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

$b$) Выбрав решение дифференциального уравнения в частных производных

$$D_1(f) = 1, \tag{16}$$

строим кривые $f = C$; это будет при нашем мероопределении семейство *параллельных кривых* в том смысле, что между кривыми $f = C + dC$ и $f = C$ в нормальном направлении все время умещается отрезок постоянной длины $dC$.

$c$) С координатной сеткой, в которой $u = C$ представляют собой вышеуказанные эквидистантные кривые, а $v = C$ ортогональные к ним траектории, находим

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2 \tag{17}$$

(*Гауссовы координаты*).

$d$) Сравнение с дифференциальными уравнениями § 2 показывает, что в последнем случае кривые $v = \text{const}$ оказываются *геодезическими линиями*. И, наоборот, ортогональные траектории к любому семейству геодезических линий образуют семейство эквидистантных кривых $u = \text{const}$.

Это взаимоотношение между дифференциальным уравнением в частных производных (16) и семействами геодезических линий включается как частный случай в общее учение о связи решений дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с его характеристиками, которую мы обсуждали с разных сторон во 2. гл. BIII, § 4, 5 этого тома и в пятой главе т. I.

## § 4. К введению гауссовой кривизны

1. Специальный случай системы гауссовых координат создают опирающиеся на какую-либо определенную точку $O$ нашей области *геодезические полярные координаты* (исходящие из $O$ с определенными «азимутами» $\varphi$ геодезические линии $\varphi = \mathrm{const}$ и окружающие $O$ геодезические окружности $r = \mathrm{const}$). Применяя к ним формулу (17), мы должны принимать во внимание, что $O$ служит сингулярной точкой для вводимой системы координат, но, разумеется, не может никак мешать непрерывности нашего $ds^2$. При таких обстоятельствах выкладки показывают, что коэффициент $G$, фигурирующий в (17), должен тут иметь следующий вид:

$$G(r, \varphi) = r^2 + r^4\mathfrak{P}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi), \tag{18}$$

где $\mathfrak{P}$ изображается степенным рядом по указанным аргументам, сходящимся в некоторой окрестности начала координат; если назвать постоянный член ряда $\alpha$, то для малых значений $r$ приближенно имеем:

$$ds^2 = dr^2 + (r^2 + \alpha r^4)d\varphi^2. \tag{19}$$

2. Смысл формул (18), (19) становится еще отчетливее, если ввести так называемые *нормальные координаты Римана*

$$r\cos\varphi = x, \quad r\sin\varphi = y. \tag{20}$$

Тогда получается из (18)

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) + \mathfrak{P}(x,\ y)(ydx - xdy)^2, \tag{21}$$

а из приближенной формулы (19) соответственно

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) + \alpha(ydx - xdy)^2.[1] \tag{22}$$

3. Нормальные координаты Римана заданием начальной точки определены, естественно, только еще с точностью до произвольных ортогональных преобразований (вращения вокруг $O$ и зеркальные отражения относительно осей, проходящих через $O$). Однако при этом ни $dx^2 + dy^2$,

[1] Как раз в этом пересчете к нормальным координатам выявляется причина, почему $G(r,\ \varphi)$ должно обладать специальной структурой, указанной в (18). При более общем $G(r,\ \varphi)$ не удалось бы получить во всей окрестности $O$ конечный однозначный $ds^2$, в отличие от (21). Ср. цитированную книгу Бляшке.

ни $(ydx - xdy)^2$ не меняются. Использованная в (22) постоянная $\alpha$, следовательно, не зависит от подобных случайностей: ею измеряется *отклонение*, которое наше мероопределение претерпевает в ближайшей точке $O$ в сравнении с *евклидовым* мероопределением.

4. Таким способом мы пришли к понятию *гауссовой кривизны*. Фактически она отличается от нашего $\alpha$ числовым множителем:

$$K = -3\alpha \tag{23}$$

(где $-3$ добавлено только затем, чтобы получить согласие с первоначальным определением $K$ у Гаусса в рамках *внешней* геометрии поверхности как произведения главных кривизн). *Таким образом, эта мера кривизны инвариантна по отношению к произвольным преобразованиям $u$, $v$, будучи определена только самим $ds^2$ и положением точки $O$.*

5. У нас способ введения $K$ тот же самый, который дал Риман в своей лекции на право преподавания в 1854[1] сразу для $n$-мерного пространства. Для полноты сравнения сто́ит еще заметить, что $(ydx-xdy)^2$ согласно 14 представляет собой квадрат удвоенной площади треугольника с вершинами в $O$, в $(dx, dy)$ и в предлагаемой в (22) также близкой точке $(x, y)$. Самое характерное в таком подходе в отличие от более обычного, непосредственно примыкающего к Гауссу, есть то, что мы не выходим никуда из двумерной области $u$, $v$, что, следовательно, эту область никоим образом не обязательно интерпретировать как искривленную поверхность в пространстве 3 измерений. Наименование «мера кривизны» недостаточно учитывает это положение вещей и даже способно нести с собой недопонимание. Тем не менее мы его придерживаемся, как общераспространенного.

6. Геометрическая интерпретация меры кривизны вытекает непринужденно из (19). Оттуда получаем длину окружности радиуса $r$ с центром в $O$:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \left(r + \frac{\alpha}{2} r^3\right) d\varphi = 2\pi r + \alpha\pi r^3, \tag{24}$$

так что

$$\alpha = -\frac{K}{3} = \lim_{r\to 0} \left(\frac{\Pi - 2\pi r}{\pi r^3}\right). \tag{25}$$

В интересах более позднего обобщения на любые $n$ перепишем эту формулу еще слегка иначе:

$$\alpha = -\frac{K}{3} = 2 \lim_{r\to 0} \left(\frac{\Pi - 2\pi r}{r^2 \cdot 2\pi r}\right). \tag{25'}$$

[1]«О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Werke, 2-е изд., S. 272. Отдельно опубликована с комментариями Вейля. Берлин 1919.

Вместо длины окружности П легко можно ввести и площадь круга $J$ (равную $\int\limits_0^r \Pi dr$). Тогда получаем:

$$J = \pi r^2 + \frac{\alpha \pi r^4}{4} \tag{26}$$

и

$$\alpha = -\frac{K}{3} = 4 \lim_{r \to 0} \left( \frac{J - \pi r^2}{r^2 \cdot \pi r^2} \right). \tag{27}$$

Эти формулы, приводящие периметр и площадь геодезического круга (малого радиуса $r$) в связь с периметром и площадью евклидова круга, описанного с тем же радиусом, были выведены около 1860 французскими геометрами на основе построений Гаусса. Наконец, заметим, что для интегрирования можно было бы с таким же успехом вместо целого круга взять его сектор и, соответственно, дугу окружности.

## § 5. Об аналитическом представлении меры кривизны $K$ при произвольно заданном $ds^2$

После геометрического определения величины $K$ желательно представить ее аналитически для произвольно заданного $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.

Это сделал сам Гаусс, не без труда[1], выведя после довольно длинного расчета следующую формулу (которая наряду с $E$, $F$, $G$ содержит только их первые и вторые производные по $u$ и $v$):

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)^2 K = {} & E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) + \\ & + F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v G_v + 4F_u F_v - 2G_u F_u) + \\ & + G(E_u G_u - 2F_v E_u + E_v^2) - \\ & - 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}). \end{aligned} \tag{28}$$

Чтобы понять закон, по которому составляется это выражение, обратимся опять к Риману, — в данном случае к работе на премию, представленной им в 1861 Парижской академии, но опубликованной как часть его научного наследия только в 1876 в Собрании сочинений[2]. Там, наряду с другими выкладками, приводятся краткие указания, как надо формировать аналог $K$ для $ds^2$, зависящего от $n$ переменных[3]. Ограничиваясь, прежде всего, $n = 2$, воспроизводим эти данные в несколько более раскрытом виде.

---

[1]Ср. Штеккель: цит. выше, с. 147.

[2]Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia propositae... (Werke, 2 изд., S. 391—404).

[3]Werke, 2 изд., S. 402, 403.

1. Подготовка. Прежде чем определять значение $K$ в $O$, необходимо построить пучок геодезических линий, исходящих из $O$. Собственно говоря, используется только их ход в ближайшей окрестности $O$. Для его прослеживания ссылаемся на уравнение (5) или соответствующие дифференциальные выражения (7) § 2. Построим два вектора с началом в $O$, которые обозначаем сокращенно $d$ и $\delta$: этим произвольный вектор, исходящий из $O$, представляется как $\varkappa d+\lambda\delta$. Затем мы должны ввести поправки к ним, или вторые дифференциалы $d^2$ и $\delta^2$, аналогично у нас используется символ $d\delta=\delta d$; тогда поправка к вектору $\varkappa d+\lambda\delta$ раскрывается как $(\varkappa d+\lambda\delta)^2=\varkappa^2 d^2+2\varkappa\lambda d\delta+\lambda^2\delta^2$. Эти выражения — и исходные, используемые дальше — следует всегда понимать как числители соответствующих производных. В применении, например, к какой-нибудь функции двух переменных $t$ и $\tau$, приращения $t$ и $\tau$ обозначаем как $dt$ и $\delta\tau$, а первые и вторые производные пишем в виде

$$\frac{d}{dt},\ \frac{\delta}{\delta\tau}\quad \text{и}\quad \frac{d^2}{dt^2},\ \frac{d}{dt}\frac{\delta}{\delta\tau},\ \frac{\delta^2}{\delta\tau^2}.$$

(Аналогичное замечание касательно дифференциальных символов, встречающихся под знаком многократного интеграла, мы уже делали в гл. II.)

С таким способом записи приступим к дифференциальным уравнениям (5): $\Psi_u=0$, $\Psi_v=0$. Заменим встречающиеся там $du$, $dv$, $d^2u$, $d^2v$ на

$$(\varkappa d+\lambda\delta)u,\ (\varkappa d+\lambda\delta)v,\ (\varkappa d+\lambda\delta)^2u,\ (\varkappa d+\lambda\delta)^2v.$$

Разделяем члены с $\varkappa^2$, $\varkappa\lambda$ и $\lambda^2$ и приравниваем по отдельности коэффициенты при них 0. Получаем 6 уравнений, которые именуем следующим сокращенным образом по вполне понятой системе:

$$\begin{aligned}
0&=\Psi_u(d,\,d)=Ed^2u+Fd^2v+\frac{E_ud^2u+2E_vdudv+(2F_v-G_u)dv^2}{2},\\
0&=\Psi_v(d,\,d)=Fd^2u+Gd^2v+\frac{(2F_u-E_v)du^2+2G_ududv+G_vdv^2}{2},\\
0&=\Psi_u(d,\,\delta)=Ed\delta u+Fd\delta v+\frac{E_udu\delta u+E_v(du\delta v+\delta udv)+(2F_v-G_u)dv\delta v}{2},\\
0&=\Psi_v(d,\,\delta)=Fd\delta u+G_v\,dv^2+\ldots,\\
0&=\Psi_u(\delta,\,\delta)=E\delta^2u+F\delta^2v+\frac{E_u\delta u^2+2E_v\delta u\delta v+(2F_v-G_u)\delta v^2}{2},\\
0&=\Psi_v(\delta,\,\delta)=F\delta^2u+\ldots
\end{aligned}\tag{29}$$

Этих 6 уравнений достаточно для определения того, чтó можно назвать «ореолом» геодезических траекторий вокруг $O$. Они позволяют выражать 6 вторых дифференциалов $d^2u$, $d\delta u$, $\delta^2u$, $d^2v\ldots$ через 4 первых $du$, $\delta u$, $dv$, $\delta v$.

Объединим по два уравнения (29) по образцу (8), используя еще третий, произвольно вводимый вектор $\delta'$. Вместо $\Psi_u = 0$, $\Psi_v = 0$ требуем, чтобы сумма $\Psi_u \delta' u + \Psi_v \delta' v$ (инвариант по отношению к произвольному преобразованию координат) исчезла для всех значений $\delta' u$, $\delta' v$. Используя еще тогда, как в (9), замену, указанную Лагранжем, получаем вместо (29) следующие три формулы:

$$\begin{aligned}
0 &= 2d(Edu\delta' u + F(du\delta' v + \delta u dv) + Gdu\delta' v) - \delta'(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2),\\
0 &= d(E\delta u\delta' u + F(\delta u\delta' v + \delta' u\delta v) + Gdv\delta' v) + \delta(Edu\delta' u + F(du\delta' v + \delta' udv) +\\
&\quad + Gdv\delta' v) - \delta'(Edu\delta u + F(du\delta v + \delta udv) + G_v dv\delta v),\\
0 &= 2\delta(E\delta u\delta' u + 2F(\delta u\delta' v + \delta' u\delta v) + G\delta v\delta' v) - \delta'(E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2).
\end{aligned} \tag{30}$$

Ради большей обозримости применяем ниже для аргументов и для коэффициентов $E$, $F$, $G$ обозначения с цифровыми индексами, т. е. полагаем

$$ds^2 = \sum_1^2 a_{ik} dx_i dx_k. \tag{31}$$

Тогда вместо (30) имеем:

$$\begin{aligned}
0 &= 2d\sum a_{ik} dx_i \delta' x_k - \delta' \sum a_{ik} dx_i dx_k,\\
0 &= d\sum a_{ik} \delta x_i \delta' x_k + \delta \sum a_{ik} dx_i \delta' x_k - \delta' \sum a_{ik} dx_i \delta x_k,\\
0 &= 2\delta \sum a_{ik} \delta x_i \delta' x_k - \delta' \sum a_{ik} \delta x_i \delta x_k.
\end{aligned} \tag{32}$$

*В такой форме эти уравнения содержатся в цитированном месте у Римана* (с той разницей, что суммы у него распространены от 1 до $n$, к чему мы перейдем только позже).

2. Решающий шаг.

Риман теперь образует из дифференциалов $d$, $\delta$ выражение, очевидным образом инвариантное, которое мы далее называем $\Omega$:

$$\Omega = \delta\delta \sum a_{ik} dx_i dx_k - 2d\delta \sum a_{ik} dx_i \delta x_k + dd \sum a_{ik} \delta x_i \delta x_k. \tag{33}$$

Здесь каждый член надлежит раскрывать чисто формально, учитывая перестановочность операций $d$ и $\delta$. Поэтому, например,

$$\delta\delta \sum a_{ik} dx_i dx_k = \delta\Big(\sum \delta a_{ik} dx_i \delta x_k + \sum a_{ik}(\delta dx_i dx_k + dx_i \delta dx_k)\Big),$$

где со своей стороны $\delta a_{ik} = \sum\limits_r \dfrac{\delta a_{ik}}{\delta x_r} \delta x_r$.

Как легко видеть, это выражение так образовано, что все члены с *третьими* дифференциалами, например, $a_{ik} d\delta\delta x_i \ldots dx_k$ *выпадают* сами собой. Остаются, следовательно, только члены с первыми и вторыми дифференциалами

$$dx_i,\ \delta x_i,\ d^2x_i,\ d\delta x_i,\ \delta^2 x_i.$$

Пусть теперь в (33) вносятся те значения вторых дифференциалов, которыми они обладают в силу уравнений (29) или (30), (32). После такого пересчета $\Omega$ описывается новым выражением, однородным второй степени относительно *первых* дифференциалов $dx_i$, как и $\delta x_i$, которое мы будем называть $[\Omega]$. Легко также распознать, что это $[\Omega]$, ввиду специальной формы самого $\Omega$ и структуры (29)—(32), приобретает только постоянный множитель, именно, $(\varkappa\nu-\lambda\mu)^2$, когда $d$ и $\delta$ заменяются соответственно на $\varkappa d+\lambda\delta$, $\mu d+\nu\delta$. Следовательно, $\Omega$ или $[\Omega]$ суть *комбинанты* из $d$ и $\delta$ (см. с. II). В результате, $[\Omega]$ должно представляться в следующем виде:

$$[\Omega]=[-](dx_1\delta x_2-\delta x_1 dx_2)^2, \tag{34}$$

где величина в квадратных скобках $[-]$ зависит неким определенным образом только от $a_{ik}$ и их производных по $x$ первого и второго порядка.

3. Этот инвариант $[\Omega]$ подобен теперь выигрышной карте в руках.

Именно, мы уже знаем другой инвариант (комбинант) с тем же множителем $(dx_1\,\delta x_2-\delta\,x_1dx_2)^2$, это квадрат площади треугольника, построенного на векторах $d$, $\delta$. Действительно, формула (14) § 3 при теперешнем способе записи гласит

$$4\Delta^2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}(dx_1\delta x_2-\delta x_1 dx_2)^2.\text{[1]} \tag{35}$$

Частное от деления (34) на (35) будет, таким образом, инвариантом, не зависящим от $d$ и $\delta$. И тут Риман утверждает, что это частное только числовым множителем отличается от гауссовой кривизны, точнее, что

$$K=-\frac{[\Omega]}{8\Delta^2}, \tag{36}$$

— чем закон составления $K$ должен полностью проясниться.

[1]Впрочем, чтобы уж полностью следовать собственным указаниям Римана, можно то же самое записать и так:

$$4\Delta^2=\sum a_{ik}dx_idx_k\cdot\sum a_{ik}\delta x_i\delta x_k-\Big(\sum a_{ik}dx_i\delta x_k\Big)^2. \tag{35'}$$

## § 6. Доказательство формулы Римана и различные дополнения к ней

Доказательство формулы (36) не требуется проводить для произвольно заданного $ds^2$; напротив, поскольку правая часть (36), во всяком случае, инвариантна, достаточно проверить ее соответствие определениям § 4 *в случае использования нормальных координат Римана*$^\star$

Но такое доказательство удается без длинных расчетов:

$a$) Поскольку при выходе геодезических траекторий из начальной точки высшие члены разложений по $x$, $y$ не сразу вступают в игру, мы можем работать с приближенным представлением (22) § 4, которое сейчас принимает вид:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \alpha(x_2^2 dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 - 2x_1 x_2 dx_1 dx_2). \tag{37}$$

$b$) Согласно уравнениям (29), в нашем случае значения вторых дифференциалов

$$d^2x_1,\ d^2x_2,\ d\delta x_1,\ d\delta x_2,\ \delta^2 x_1,\ \delta^2 x_2$$

начинают от нуля.

$c$) Вследствие этого расчет $[\Omega]$ по его выражению

$$\Omega = \delta\delta \sum a_{ik} dx_i dx_k - 2d\delta \sum a_{ik} dx_i \delta x_k + dd \sum a_{ik} \delta x_i \delta x_k$$

сводится к варьированию только $a_{ik}$. Начальный отрезок $dx_1^2 + dx_2^2$ ряда (37), имея постоянные коэффициенты, не дает при этой последней операции никакого вклада. От дальнейших членов таковой получается последовательно в виде

$$\begin{aligned}
\alpha\Big\{&\delta\delta(x_2^2 dx_1^2 \quad -2x_1x_2dx_1dx_2 \qquad\qquad\qquad\quad +x_1^2dx_2^2)-\\
&-2d\delta(x_2^2dx_1\delta x_1 - x_1x_2dx_1\delta x_2 - x_1x_2\delta x_1dx_2 + x_1^2dx_2\delta x_2)+\\
&+dd(x_2^2\delta x_1^2 \quad -2x_1x_2\delta x_1\delta x_2 \qquad\qquad\qquad\quad +x_1^2\delta x_2^2)\Big\}.
\end{aligned}$$

От каждой горизонтали вклад на самом деле одинаков:

$$2\alpha(\delta x_2 dx_1 - \delta x_1 dx_2)^2,$$

так что вместе получается

$$[\Omega] = 6\alpha(\delta x_2 dx_1 - \delta x_1 dx_2)^2. \tag{38}$$

*d*) С другой стороны, по формуле (14) § 3:

$$4\triangle^2 = (\delta x_2 dx_1 - \delta x_1 dx_2)^2, \tag{39}$$

так что (36) дает

$$K = -3\alpha$$

в согласии с первоначальным определением $K$, отраженным в формуле (23), § 4.

Это доказательство мы сопроводим еще другим истолкованием величины $K$.

1. Рассмотрим опять гауссовы координаты так, как они вводились и обозначались на стр. 179, с $ds^2 = du^2 + Gdv^2$, где $u = \text{const}$ представляют собой параллельные кривые, а $v = \text{const}$ ортогональные к ним (геодезические) траектории. Ограничим наше рассмотрение полосой вдоль $u = 0$ и в соответствии с этим используем разложение $G$ в ряд по степеням $u$ вплоть до членов второй степени:

$$ds^2 = du^2 + (\varphi(v) + u\psi(v) + u^2\chi(v))dv^2. \tag{41}$$

Функциональным преобразованием $v$ можно добиться, чтобы соблюдалось $\varphi(v) = 1$. Допустим также, что кривая $u = 0$ была построена как геодезическая. Вдоль $u = 0$ должны тогда соблюдаться уравнения

$$\Psi_u(d, d) = 0, \quad \Psi_v(d, d) = 0$$

(стр. 183). Но вдоль $u = 0$ само собой $du = d^2u = 0$, а $dv$ совпадает с длиной дуги $ds$, значит, на этой дуге $d^2v = 0$. Согласно привлеченным уравнениям, $G_v$ исчезает вдоль $u = 0$. Это просто означает $\psi(v) = 0$ и в результате:

$$ds^2 = du^2 + (1 + u^2\chi(v))dv^2. \tag{42}$$

2. Для понимания, что такое $[\Omega]$, взглянем на рисунок 6 (где вектор $\delta$, привязанный к каждой точке $u = 0$, определяется как отрезок кривой $v = \text{const}$, проходящей через ту же точку, между $u = 0$ и $u = \delta u$, причем значение $\delta u$ произвольно, но одно и то же для всех $v$).

Мы уже отметили (при следовании вдоль $u = 0$) $d^2u = 0$, $d^2v = 0$, к этому еще добавляется $d\delta u = 0$ и (раз принято $\delta v = 0$) $d\delta v = 0$ и $\delta^2 v = 0$. Но каждая линия $v = \text{const}$ тоже относится к геодезическим, и вдоль нее $\delta s$ совпадает с $\delta u$. Поэтому надо положить $\delta^2 u = 0$. Опять-таки и в этом случае можно рассчитать $[\Omega]$, обращая внимание только на члены с первыми дифференциалами.

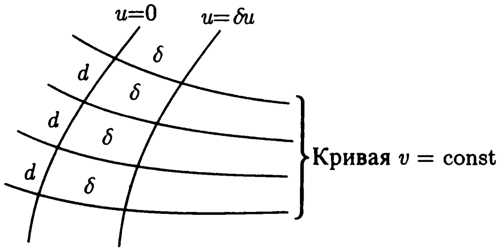


Рис. 6

3. Прямой расчет [$\Omega$] дает теперь просто $\chi(v) = -K$, так что (все время вблизи $u = 0$)

$$ds^2 = du^2 + (1 - u^2 \cdot K)dv^2. \tag{43}$$

Замечаем мимоходом: если между двумя произвольными точками с $u = 0$ провести еще какую-либо другую дугу, то значение интеграла

$$\int \frac{ds^2}{dt^2} dt$$

на ней превысит такой же интеграл, взятый вдоль $u = 0$, на величину

$$\int \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 - Ku^2 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] dt. \tag{44}$$

Отсюда следует известные утверждения о второй вариации длин кривых относительно геодезической линии $u = 0$, в частности, что эта вариация всегда положительна при отрицательном $K$ (Якоби)[1].

4. Важнее, однако, оказывается простая геометрическая интерпретация $K$, отличная от уже указанных. Для более удобного выписывания обозначений изобразим отдельный четырехугольник рис. 6 в увеличенном масштабе (рис. 7). Формула (43) дает нам тогда $\frac{1}{2}\delta\delta ds^2 = -K\delta u^2 ds^2$, или

$$K = -\frac{1}{2} \frac{\delta\delta\, ds^2}{\delta u^2 ds^2}. \tag{45}$$

[1] Werke IV, S. 39–55.

Эта формула независима от азимута линии $u = 0$, выбираемой из пучка геодезических, проходящих через точку, в которой требуется найти $K$. Такая интерпретация $K$ (которой я обязан Каратеодори) настолько красива, что я не мог пройти мимо нее, хотя в дальнейшем и не использую. Отличие этого подхода к заданию $K$ в сравнении с более ранним выступает, думается, всего яснее, если представить себе систему координат, образованную меридианами и параллелями на поверхности земного шаре. В обоих случаях рассматриваем мы переменность длины отрезка параллели, заключенного между двумя меридианами: в первом случае вблизи полюса, во втором вблизи экватора.

## § 7. Об эквивалентности двух бинарных $ds^2$. Подробности для случая постоянной меры кривизны

*а*) Разумеется, с каждой группой преобразований связана проблема эквивалентности: Когда можно два предложенных образа перевести преобразованиями данной группы друг в друга? Точно так же сама собой напрашивается связь такой проблемы с теорией инвариантов группы: весь набор инвариантов у обоих взаимосвязанных образов должен быть одинаков. Поэтому все время всплывает старая идея выводить понятие инварианта прямо из понятия эквивалентности. Так, например, для общей теории линейных инвариантов попытался сделать Аронгольд (Aronhold) в своих фундаментальных основах теории инвариантов, Fundamentalen Begründung der Invariantentheorie, журнал Крелля 62 (1863). Все же на этом пути встречаются с осложнениями, когда хотят не ограничиться общими положениями, а освоить разные специальные случаи.

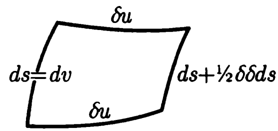


Рис. 7

Примером служит то, что было сказано в гл. I (стр. 40) об эквивалентности двух билинейных форм $\sum \alpha_{ik} u_i x_k$, $\sum \beta_{ik} u_i x_k$ (билинейные формы с контрагредиентными переменными). Пусть $\delta_{ik}$ по известному определению =1 при $i = k$ и =0 при $i \lessgtr k$. Тогда в общем случае достаточно, если оба определителя $|\alpha_{ik} + \lambda\delta_{ik}|$ и $|\beta_{ik} + \lambda\delta_{ik}|$ как полиномы от $\lambda$ совпадают между собой. Однако встречаются исключения, когда в состав этих полиномов входят кратные множители, линейные по $\lambda$. Это ведет к интересной, но достаточно глубокой теории «элементарных делителей». В инвариантно-теоретическом смысле это означает: для выявления инвариантных комбинаций следует обратиться к расширению определителя $|\alpha_{ik} + \lambda\delta_{ik}|$ посредством окаймления его 1,2... строками и столбцами неопределенных величин, преобразующихся соответственно когредиентно и контрагредиентно к $x$.

Сходное положение во всех других случаях. Обычно лучше добираться до цели, не начиная с проблемы эквивалентности, а вместо того ища сначала законы составления инвариантов, чтобы на каком-то этапе решить, достаточно ли продвинут процесс их составления для решения проблемы эквивалентности.

$b$) Так получается и с вопросом об эквивалентности двух (бинарных) дифференциальных форм $ds^2$ и $ds'^2$ по отношению к нашей $G_\infty$. Если $ds^2$ переводится в $ds'^2$ подстановкой $x_i = \varphi_i(x'_1, x'_2)$, то и мера кривизны $K(x_1, x_2)$ должна совпадать с $K'(x'_1, x'_2)$. То же самое должно быть верным, в частности, для значений первого дифференциального параметра $D_1K$ и $D'_1K'$. Этим, вообще говоря, уже определена подстановка, о которой может идти речь. Однако бывают ситуации, когда дело таким образом не исчерпывается (если $D_1K$ функционально зависит от $K$). Тогда приходится прибегать к дальнейшим критериям, которые в современном представлении (в развитие учебника Дарбу) можно найти, например, в статье Восса (Voß) об изометрии поверхностей в Энциклопедии (=III D, 6 a) под №19.

Исторически этот вопрос вскоре после появления гауссовых Disquisitiones был изучен сперва Миндингом (Mindig), журнал Крелля 6, 1830. Миндинг, в частности, показал, что если величина $K$ постоянна (не зависит от $x_1$, $x_2$), достаточным условием эквивалентности двух $ds^2$ является равенство их $K$. Это связано с тем, что $ds^2$ тогда представляется в нормальных формах различного рода, зависящих только от величины $K$. Одновременно обнаруживается, что любая такая нормальная форма, и само конкретное $ds^2$, переводится в себя трехкратно бесконечным множеством преобразований. Отсюда то значение, которое получает учение о $ds^2$ постоянной кривизны для основ геометрии. С $K = 0$ приходим к формулам обычной (евклидовой) планиметрии, с положительным $K$ к формулам сферической геометрии, с отрицательным $K$ к таковым псевдосферической геометрии.

$c$) К многообразиям «постоянной кривизны» (притом не только к двумерным) мы раньше уже приходили в ходе нашего изложения с другой стороны, именно, от проективного мероопределения Кели (ср. конец раздела I четвертой главы т. 1 и краткое примечание на стр. 36 т. 2). В дополнение к бросающимся в глаза проективным соотношениям, Клиффорд и я обратили внимание на существенное обстоятельство, которое детально проанализировал, в частности, Энрикес (Enriques) в статье о принципах геометрии в энциклопедии (=III A, B I). Именно, наши исследования о структуре $ds^2$ касаются сперва только *области с простейшей связностью*, где координаты $u$, $v$ приписываются точкам многообразия однозначно. Если же мы, напротив, охватываем многообразие как *единое целое*, то подобные многообразия вполне могут, при одном и том же $K$ и без всяких сингулярных точек внутри, тем не менее различаться *соотношениями связности*. Чтобы показать характерный пример, открытый Клиффордом: многообразия постоянной нулевой кривизны (следовательно, с обычным евклидовым элементом длины) легко можно замкнуть на себя, чтобы они покрывали только конечную общую площадь. Из авторов учебников, насколько мне до сих пор известно, только Киллинг (Killing) детально вник в эти вещи (Введение в основы геометрии. Einführung in die Grundlagen der Geometrie. 1893)[1]. И здесь мы поднимаем вопрос, фундаментальный для всей дифференциальной геометрии и по своему смыслу распространяющийся на произвольные дифференциальные формы более высокого порядка: вопрос, какие соотношения связности при неограниченном продолжении многообразия совместимы с заданной формой $ds^2$.

$d$) Далее мы должны держаться условия, чтобы $u$, $v$ приписывались только вещественные значения. Тогда дифференциальные формы $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ относительно $du$, $dv$ можно классифицировать с точки зрения, представляемой законом инерции квадратичных форм. Иметь дело с такими $ds^2$, как упоминавшиеся до сих пор, т. е. с *положительно определенными*, значит ограничиться только одним из различных классов. Уже изучение группы Лоренца дает нам повод привлечь такие *неопределенные* формы, как $dx^2 - c^2dt^2$ (или, при 4 переменных, $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$). Будет интересно рассмотреть, как наши выкладки переносятся на подобные неопределенные формы и чтó при этом должно видоизменяться или дополняться.

Определения, которые мы давали для $K$, в случае неопределенных форм несколько ограничиваются в своем применении. Например, мы с ними уже не можем, как это происходило на стр. 182, интегрировать по полной площади геодезического круга, но должны ограничиваться его сектором, как упоминалось в цитируемом параграфе.

# С. $n$-мерные римановы многообразия

## I. Формальные основы

Формализм, развернутый в разделе В, был представлен так, что он сам собой предрасположен вести к обобщению, которое развил Риман

[1] Ср. также вышедшую между тем работу Г. Хопфа (H. Hopf): К пространственной проблеме Клиффорда-Клейна. Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. Math. Ann. 95 (1926). — *Прим. ред.*

для $n$ измерений. Это обобщение мы постараемся представить так, чтобы одновременно можно было оценить значимость построений, лежащих в русле идей Римана, но развитых несколько позже с другой стороны.

## § 1. Исторические указания

От самого Римана нами используются:

1. Доклад на право преподавания (1854): О гипотезах, лежащих в основании геометрии (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen), опубликованный после смерти Римана (1866) Дедекиндом (Dedekind) в т. 13 Göttinger Abhandlungen (1868)[1]

2. Сочинение на премию (1861): Математический комментарий с попыткой ответить на вопрос, предложенный достопочтенной Парижской Академией. (Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab ill. Academia Parisiensi propositae)[2]. Сам вопрос относится к проблеме теплопроводности, которая нас сегодня как таковая не интересует; однако в этом сочинении есть краткий абзац, посвященный квадратичным дифференциальным формам $n$ переменных (ср. стр. 401—404 Собрания сочинений, 2-е издание), он-то и имеет для нас фундаментальное значение. Эта работа (не получившая премии Парижской академии) стала известна только в 1876 с предпринятым Дедекиндом и Вебером (H. Weber) первым изданием собрания сочинений Римана.

№1, поскольку это был доклад для целого факультета, не содержит почти никаких формул, но тем более нацелен на развитие принципиальных понятий. Тщательно замалчиваемое Гауссом в его Disquisitiones, именно, что у него речь идет не только о дальнейшем развитии геометрии, но и о ее основаниях (и тем самым о теоретических основаниях естественных наук вообще), выступило здесь наружу. Об этом уже было кое-что рассказано в т. 1. В современном аспекте речь идет о том, что Риман в №1 наметил основные линии для систематической разработки теории квадратичных дифференциальных форм с $n$ переменными: $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$, в частности, определил для них инвариант, дающий истинное обобщение обозначавшегося нами в случае $n = 2$ через $[\Omega]$. Отсюда, как это еще будет обстоятельно описано, следует обобщение гауссовой кривизны на $n$ измерений по Риману.

Публикация №1 пришлась на время, когда я только что начал самостоятельно заниматься математическими проблемами. У меня еще живо воспоминание о том исключительном впечатлении, которое произвел ход мыслей Римана на молодых математиков. Многое казалось нам темным

[1] Ср. сноску 1, стр. 181.

[2] Ср. сноску 2, стр. 182

и тяжело воспринимаемым, но при том все же какой-то непостижимой глубины там, где современный математик, заранее приспособивший свое мышление к таким вещам, удивляется еще только ясности и чеканной точности анализа.

№2 представляет, хотя и очень сжато, дополнительные формулы, в особенности определение меры кривизны при произвольном $ds^2$. Недоумевают, как мог Риман доверить столь важные заключения судьбе работы на премию, оставшейся неопубликованной (потому что Академия не знала, как взяться за появившееся новое идейное содержание). Здесь один из пунктов, где в развитие нашей науки вторгаются экономические соображения. Участие в академических конкурсах на премию было в ту эпоху одним из немногих средств, которыми исследователь-математик мог пополнить свои скромные поступления. Тогда еще не вошли в обычай премии, дающиеся академическими корпорациями или учреждениями в знак признания уже совершившихся больших научных достижений.

Публикация №1 в 1868 году сразу дала толчок целому ряду идущих далее сочинений различных авторов. С данной точки зрения можно не останавливаться ни на работах Гельмгольца об основаниях геометрии, ни на параллельной, в которой я сам принимал участие, разработке проективной геометрии. Но здесь надо выделить в первую очередь трех авторов: Бельтрами, Кристоффеля (Cristoffel) и Липшица (Lipschitz). Оставляя за собой право вернуться к историческим обстоятельствам появления отдельных работ, перечислю пока здесь внешние данные.

У Бельтрами на первом месте две работы: его общая теория пространств постоянной кривизны (1868, Annali di Mat [2], II=Соч., т. 1) и исследование дифференциального параметра при произвольно заданном элементе дуги (1869, Atti di Bologna [2], VIII = Соч., т. 2)

Кристоффель ставит задачу об эквивалентности двух произвольных дифференциальных форм $\sum a_{ik}dx_idx_k$ и $\sum b_{ik}dy_idy_k$ (Журнал Крелля 70: О преобразовании однородных дифференциальных выражений второй степени. Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades датировано 3 янв. 1869). Насколько далеко он продвинулся в этой задаче и какие исключительные случаи решительно оставил в сторону, можно еще обсудить впоследствии. Здесь только заметим предварительно, что он своим методом находит и ставит в центр рассмотрения инвариант Римана $[\Omega]$.

Большое число работ опубликовал Липшиц (все в журнале Крелля). Первая датирована 4 янв. 1869 и непосредственно следует за сообщением Кристоффеля в первом выпуске 70 т. Липшиц исследует там в особенности вопрос (обойденный Кристоффелем, но ясно освещенный у Римана в №2), когда можно превратить $\sum a_{ik}dx_idx_k$ в форму с постоянными коэффициентами и, следовательно, далее в «евклидову» форму $\sum dy_i^2$. Опять с некоторой стороны он приходит к инварианту $[\Omega]$, тождественное исчезновение которого есть необходимое и достаточное условие для указанного превращения. — Из других работ Липшица отметим помещенную в т. 72 (1870), где на стр. 29, 30 сопоставляются обозримым образом и применяются с разными целями процессы построения инвариантов, используемые далее и нами. Наконец, назовем работу в т. 82 (1877), связанную с публикацией риманова сочинения на премию и дающую полную картину взаимоотношений между собственным определением формы $[\Omega]$ у Римана и формулами самого Липшица.

Теперь я придаю своему докладу снова не столько историческую, сколько систематическую форму, которая примыкает к нашему прежнему изложению, в остальном же может рассматриваться как пожинание плодов цитированной литературы.

## § 2. Дифференциальные формы с одними первыми дифференциалами

В качестве субстрата наших рассмотрений мы располагаем многообразием (пространством) $n$ каких-либо независимых переменных $x_1 \ldots x_n$, которые подвергаются любым точечным преобразованиям из $G_\infty$ (или лучше: любым координатным преобразованиям)

$$x_i = \varphi_i(y_1 \ldots y_n) \tag{1}$$

в смысле, указанном на стр. 162. Систему дифференциалов $dx_1, \ldots dx_n$ при этих преобразованиях, как уже делалось на стр. 163, в каждой точке преобразуем линейно посредством

$$dx_i = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} dy_k \tag{2}$$

и называем как единое целое *вектором*,— согласно сказанному его можно наглядно представлять в каждый момент отрезком конечной длины, исходящим из точки $(x)$, наподобие того как предлагал еще Коши в своем обосновании дифференциального исчисления. Понятия теории линейных инвариантов, развитые в гл. 1, здесь находят непосредственное применение с той лишь разницей, что определитель подстановки (2), вообще говоря, отличен от нуля (в то время как в гл. 1 рассматривались унимодулярные подстановки).

В качестве объекта наших исследований имеем в виду сначала линейные формы

$$\sum u_i dx_i, \tag{3}$$

где $u_i$ сами зависят от $x_1 \ldots x_n$, так что мы получаем «пфаффиан»; простейший пример предоставляется дифференциалом

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

произвольной функции $f$ от $x$. Систему величин $u_i$ — в случае, если $\sum u_i dx_i$ оказывается инвариантом — мы называем контрагредиентным вектором[1].

Перейдем теперь к системам величин, которые при подстановках (1) ведут себя, как двойные произведения либо $dx_i$, либо $u_i$, и которые мы тогда называем соответственно когредиентными либо контрагредиентными тензорами. При этом различаем симметричный и антисимметричный случай. Компоненты симметричного тензора в когредиентном случае подвергается подстановке подобно

$$dx_1^2,\ 2dx_1dx_2,\ dx_2^2, \ldots \tag{4a}$$

или подобно дающим то же самое, при двух когредиентных векторах $d$ и $\delta$, билинейными комбинациями

$$dx_1\delta x_1,\ dx_1\delta x_2 + dx_2\delta x_1,\ dx_2\delta x_2, \tag{4b}$$

аналогично и в контрагредиентном случае. Простейший пример антисимметричного тензора образуют составленные из компонентов двух векторов $d$, $\delta$ миноры

$$p_{ik} = dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i; \tag{5}$$

подразумевается, что линейные подстановки величин (4) и (5) соответствуют преобразованиям (2). Задавшись квадратичной по $dx_i$ формой

$$\sum a_{ik} dx_i dx_k, \tag{6}$$

имеем в лице $a_{ik}$ пример тензора, контрагредиентного к компонентам (4$a$). Сходным образом мы будем часто использовать альтернирующую форму

$$\sum \lambda_{ik} p_{ik}. \tag{7}$$

Нет надобности систематически говорить здесь о дифференциальных формах более высокой степени и о их связи с соответствующими высшими грассмановыми ступенями. Точно так же надобность возвращаться к элементарной теории инвариантов алгебраических форм с ее классификацией тех форм, которые играют роль в аффинной или в проективной геометрии, довольно ограничена и специфична — только по

[1]Вместо «контрагредиентный вектор» сейчас говорят «ковариантный вектор», точно так же «контравариантный» вместо «когредиентный». Для тензоров словоупотребление еще колеблется. Ср. также стр. 223. Примечание 1. — *Прим. ред.*

отношению к первым дифференциалам в обсуждаемой здесь теории инвариантов дифференциальных форм.

Относительно формы $[\Omega]$, которая дает числитель для римановой меры кривизны, хочется здесь все же сделать предварительные замечания. Алгебраически она представляет собой известную квадратичную комбинацию миноров, введенных в (5), которую в результате мы запишем как:

$$[\Omega] = \sum (ik,\, rs) p_{ik} p_{rs}. \tag{8}$$

Если, продолжая материал гл. II, принять $n = 4$, то $[\Omega]$ данного вида в проективном понимании (когда $p_{ik}$ интерпретируются как линейчатые координаты в трехмерном пространстве) совпадает с левой частью «линейчатого комплекса второй степени». В этом открывается для меня примечательное личное воспоминание, показывающее, в какой малой степени те связи между разными математическими областями, которые потом воспринимаются как самоочевидные, в момент своего рождения нуждались в осознании непосредственными участниками. Тогда, осенью 1868, я выбрал себе темой общую теорию линейчатых комплексов, продолжая исследования своего скончавшегося учителя Плюккера. Референтом был Липшиц, который, как здесь уже упоминалось, тогда сам интенсивно занимался составлением и исследованием дифференциальной формы $[\Omega]$. О предмете моей диссертации Липшиц в то же время обстоятельно со мной разговаривал. Но ни слова об отношении моей работы к лекции Римана на право преподавания, которая для самого Липшица была, так сказать, ежедневной пищей! И когда я несколькими годами позже (1872) работал над своей Эрлангенской программой уже с четко поставленной задачей обозрения текущих разработок геометров с единой точки зрения, то при этом подчеркнул, что точечное преобразование (1) в бесконечно малом участке пространства всегда носит характер линейного преобразования, однако я все еще прошел мимо работ Римана, Кристоффеля и Липшица, которые доставили бы прекраснейшее подкрепление моим идеям.

## § 3. Подготовка к определению римановой меры кривизны

Пусть мы имеем дело с какой-либо определенной квадратичной дифференциальной формой

$$f(d,\, d) = \sum_1^n a_{ik} dx_i dx_k, \tag{9}$$

которая интерпретируется как квадрат элемента дуги в $R_n$ и соответственно обозначается как $ds^2$. Под $a_{ik}$ понимаются произвольные регулярные функции от $x$ во взятой для исследования области. Пока не оговорено другое, мы принимаем, что допускаются только вещественные значения $x_i$ (как и $a_{ik}$) и что у нас положительно определенный $ds^2$. Определитель

$$|a_{ik}| = a \tag{10}$$

тогда точно так же положителен.

Привлекая сначала алгебраическую теорию обычных квадратичных форм, составим следующий перечень формул:

1. Вместе с (9) инвариантом является и поляра

$$f(d, \delta) = \sum a_{ik} dx_i \delta x_k. \tag{11}$$

То же самое для элементарной комбинации

$$F = \begin{vmatrix} f(d,\, d) & f(d,\, \delta) \\ f(\delta,\, d) & f(\delta,\, \delta) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

которая отвечает учетверенному квадрату площади бесконечно малого треугольника, построенного на выходящих из данной точки векторах $d$ и $\delta$.

2. При разложении этого $F$ получаем сначала:

$$F = \sum (a_{ir} a_{ks} - a_{kr} a_{is}) \begin{pmatrix} dx_i dx_r \delta x_k \delta x_s + dx_k dx_s \delta x_i \delta x_r \\ -dx_i dx_s \delta x_k \delta x_r - dx_k dx_r \delta x_i \delta x_s \end{pmatrix}, \tag{13}$$

при суммировании по всем комбинациям $i$, $k$ и $r$, $s$, когда $r \gtrless s$. Здесь можно сориентироваться по грассмановым величинам второй ступени (5), чтобы получить:

$$F = \sum (a_{ir} a_{ks} - a_{kr} a_{is}) p_{ik} p_{rs}. \tag{14}$$

При этом принимаем во внимание, что между 6 такими $p_{ik}$, при пробегании каждым индексом 4 различных значений, существует следующее квадратичное тождество (ср. стр. 19, 20):

$$P \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0. \tag{15}$$

Соответственно можно различным образом модифицировать правую часть (14) (добавляя $P$, умноженное на любую величину). Среди всех возникающих таким образом выражений воспроизведенное в (14) выделяется тем, что оно «нормировано», т. е. что между коэффициентами членов $p_{ik}p_{rs}$ действует такие же связующие тождества, как между самими $p_{ik}p_{rs}$. В самом деле, параллелью к равенству (15) является следующее:

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} \\ a_{23} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{16}$$

3. Определитель $|a|$ *отнюдь не* инвариантен. Напротив того, когда $\sum a_{ik}dy_idy_k$ преобразуется подстановками (2) в $\sum b_{ik}dx_idx_k$, имеем

$$|b_{ik}| = r^2|a_{ik}|, \tag{17}$$

где под $r$ понимается значение функционального определителя $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\right)$.

Точно так же не является инвариантом сама по себе «присоединенная» квадратичная форма (возникающая из $a$ «окаймлением» контрагредиентными переменными $u$):

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{ik} & u_i \\ u_k & 0 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Но инвариант получается, если $\Phi$ поделить на $a$. Конкретно мы записываем

$$-\frac{\Phi}{a} = \sum a^{ik}u_iu_k \tag{19}$$

(где $a^{ik} = \dfrac{\partial \log a}{\partial a_{ik}}$) и обозначаем (19) как *реципрокную* форму для $f$, так как видно, что обе формы находятся во взаимном друг другу отношении.

4. Из вариантности (19) следует, что $a^{ik}$ когредиентны двойным произведениям $dx_idx_k$. Мы должны, следовательно, получить из $F$ (14) снова инварианты, если внесем туда вместо $dx_idx_k$ или вместо $\delta x_i\delta x_k$, или, наконец, вместо тех и других когредиентные им $a^{ik}$. Правда, ничего нового не получается:

Первые способы дают $(n-1)f(\delta, \delta)$ или $(n-1)f(d, d)$, последний способ — просто число $n(n-1)$[1].

5. Вспомним еще о том инвариантном выражении, которое получается на основе $f$ для пространственного элемента $n$-мерного многообразия. Пусть из точки $(x)$ исходят $n$ линейно независимых векторов:

$$d^{(1)}, \quad d^{(2)}, \dots, d^{(n)}.$$

[1]Проще всего проверять такие факты, когда составлением некоторых линейных комбинаций из $dx$ форма $f(d, d)$ приведена к виду $\sum c_idy_i^2$. Присоединенная форма превращается тогда в $\sum \dfrac{v_i^2}{c_i}$, а $F$ будет иметь вид $\sum c_ic_kp_{ik}^2$.

Речь идет тогда просто об определителе из относящихся сюда $dx_i^{(k)}$, умноженном на квадратный корень из $a$:

$$d\omega = \sqrt{a}\begin{vmatrix} d^{(1)}x_1 & & d^{(1)}x_n \\ d^{(2)}x_1 & & d^{(2)}x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{(n)}x_1 & \cdots & d^{(n)}x_n \end{vmatrix}. \tag{20}$$

6. Подготовимся теперь к более высокой теории, связанной с нашим $f$. Шагом к ней является констатация факта, что $a_{ik}$ зависят от $x_1 \dots x_n$ (и что в их лице мы имеем *поле* контрагредиентных тензоров[1]). Далее надо искать инварианты — дифференциальные инварианты — которые наряду с $a_{ik}$ содержали бы их первые, вторые,... производные по $x^*$ [для определения инвариантности которых следует руководствоваться вместо $G_\infty$ (1) соответственно расширенной $G_\infty$]. Поиск простейшего из таких инвариантов сводится к более близкому знакомству с числителем выражения заранее названной в § 2 римановой меры кривизны, который мы обозначаем $[\Omega]$:

$$[\Omega] = \sum (ik, rs) p_{ik} p_{rs} \tag{21}$$

и к закону составления которого мы чуть ниже уже перейдем. *Частное*

$$K_R = -\frac{1}{2}\frac{[\Omega]}{F} \tag{22}$$

*служит тогда определением римановой меры кривизны.*

При $n = 2$, когда налицо единственно $p_{ik} = p_{12}$, входящее одинаково в квадрате в числитель и знаменатель (22), оно само собой выпадает, так что $K_R$ оказывается функцией величин $a_{ik}$ и их производных, т. е. некоторым *локальным инвариантом*; таковой совпадает в данном случае с гауссовой мерой кривизны. Однако для бо̀льших значений $n$ величина $K_R$ зависит, кроме того, от самих $p_{ik}$, т. е. от выбора пучка векторов $\varkappa d + \lambda\delta$; мы называем ее поэтому *инвариантом пучка*.

Естественно, встречаются особенные случаи, когда коэффициенты при $p_{ik}p_{rs}$ в числителе пропорциональны соответствующим коэффициентам в знаменателе, и, в свою очередь, выделяются те варианты, когда $K_R$ не зависит также от $x_1 \dots x_n$, т. е. вообще оказывается константой. Таковы многообразия, выделенные Риманом как *многообразия постоянной*

[1]Смотри гл. I, стр. 56 и след.

*кривизны*[1]. В частности, если константа — нулевая, говорят об *евклидовом* многообразии.

Мы хотим сразу посмотреть, что дает в применении к $K_R$ процесс подстановки, однократной или двукратной, указанный в пункте 4. Однократная приводит к инварианту, который мы называем *инвариантом направления* (потому что он содержит только систему дифференциалов $dx_i$, притом как однородная функция нулевой степени)

$$\frac{\sum K_{ik} dx_i dx_k}{\sum a_{ik} dx_i dx_k} = -\frac{\sum(ik,\, rs) \begin{Bmatrix} a^{ir} dx_k dx_s + a^{ks} dx_i dx_r - \\ -a^{is} dx_k dx_r - a^{kr} dx_i dx_s \end{Bmatrix}}{2(n-1) f(d,\, d)}. \tag{23}$$

Двукратная же приводит к *локальному инварианту*

$$K = \frac{\sum K_{ik} a^{ik}}{n} = -\frac{\sum(ik,\, rs)\left(a^{ir}a^{ks} - a^{is}a^{kr}\right)}{n(n-1)}. \tag{24}$$

(Связь выражения $K_{ik}$, фигурирующего в левых частях (23), (24), со структурой правых частей достаточно очевидна.) Обоими инвариантами мы еще будем заниматься. В специальном случае $n = 4$ они, наряду с $K_R$, образуют исходный пункт *теории тяготения Эйнштейна*, равно как и выкладок Гильберта (Hilbert) в его «Основах физики» (Grundlagen der Physik Göttinger Nachrichten, Дек. 1915). Идею заменять $dx_i dx_k$ в $K_R$ на когредиентные $a^{ik}$, впрочем, высказывал и применял еще Липшиц в своих первых исследованиях[2].

## § 4. Уравнения геодезических линий и связанные с ними инварианты*

В нашем изложении разработок Римана для $n = 2$ мы уже по существу все подготовили, чтобы далее построения для произвольного $n$ могли развиваться беспрепятственно.

Опять вместо самих геодезических линий (представляющих собой объект чисто геометрического исследования) рассматриваем прежде всего определяющие их уравнения движения материальной точки в пространстве $R_n$, характеризующемся элементом дуги $ds$, без участия сил.

[1]Ср. здесь F. Schur: Räume konstanten Krümmungsmaßes. (Ф. Шур: *Пространства постоянной кривизны*). Math. Ann. 27 (1886), S. 537.

[2]Ср. в частности журнал Крелля 72 (1870), 33 и 34, сноска. То, что мы в тексте называем $K$, обозначено у Липшица $-\dfrac{\Psi}{n(n-1)}$, а у Гильберта $-\dfrac{K}{n(n-1)}$.

Соответственно имеем вариационную задачу

$$\delta \int\limits_{-}^{-} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt = \delta \int\limits_{-}^{-} \frac{\sum a_{ik} dx_i dx_k}{dt^2} dt = 0 \tag{25}$$

и находим (смотри весь § 2 предыдущего раздела), что с произвольными $\delta x_k$ должен обращаться в нуль инвариант

$$2d\left(\sum a_{ik} dx_i \delta x_k\right) - \delta \sum a_{ik} dx_k. \tag{26}$$

Появляющиеся сперва при раскрытии этого выражения члены с $d\delta$ взаимно уничтожаются; следовательно, остается совокупность линейных по $\delta x_r$ членов, которую мы вслед за Липшицем обозначаем следующим образом:

$$2 \sum \Psi_r(d,\, d) \delta x_r. \tag{27}$$

Здесь $\Psi_r$ составляются из $dx$, $d^2x$:

$$\Psi_r(d,\, d) = \sum_i a_{ir} d^2 x_i + \sum_{i,\,k} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) dx_i dx_k. \tag{28}$$

Итак, получаем уравнения движения и с ними определение траекторий материальной точки без приложения силы:

$$\Psi_r(d,\, d) = 0. \tag{29}$$

Одновременно из инвариантности (27) следует, что выражения $\Psi_r(d,\, d)$ в совокупности представляют *контрагредиентный* вектор.

Мы получим и *когредиентный* вектор, если умножим $\Psi_r$ на коэффициенты $a^{rs}$ реципрокной квадратичной формы и сложим результаты. Компоненты этого вектора таковы:

$$Dx_s = d^2 x_s + \sum_{i,\,k,\,r} \frac{a^{rs}}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) dx_i dx_k. \tag{30}$$

Следовательно, характер вектора имеет набор не самих $d^2 x_s$ непосредственно, а только дополненных вышеуказанным образом.

Ясно также, что предыдущие утверждения распространяются на несколько обобщенные в сравнении с $\Psi_r(d,\, d)$ выражения

$$\Psi_r(d,\, \partial) = \sum_i a_{ir} d\delta x_i + \sum_{i,k} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) dx_i \delta x_k. \tag{31}$$

Постоянно встречающиеся у нас комбинации первых частных производных от $a_{ik}$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right) \quad \text{или} \quad \sum_s \frac{a^{rs}}{2}\left(\frac{\partial a_{is}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{ks}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_s}\right) \qquad (32)$$

представляются привычными каждому, кто занимался подобными проблемами. Сперва это были Риман, Кристоффель и Липшиц. Каждый из них вводил для них особенные сокращения. Тенденция к унификации привела к тому, что в литературе нашли широкое распространение только сокращения, выбранные Кристоффелем

$$\binom{i\,k}{r} \quad \text{или} \quad \left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\}, \qquad (33)$$

которые и называются *символами Кристоффеля первого* или *второго рода*[1]. Они сами собой напрашиваются в теории геодезических линий. Исходный для них инвариант (26) можно было бы выписать из чисто формальных соображений как простейший требуемого вида, без обращения к вариационной задаче.

## § 5*. Риманово [Ω]

Следуя Риману, начинаем с уравнений $\Psi_r = 0$. Протянем из точки $(x)$ целый «пучок» векторов

$$\varkappa d + \lambda\delta$$

и представим себе, что каждый из них геодезически продолжается. Возникает то, что мы будем называть «геодезической поверхностью», проходящей через $(x)$. На ней нам нужно ближайшее «окружение» данной точки $O$, которое в соответствии с формулами (29) на стр. 173 задается $3n$ дифференциальных уравнений

$$\Psi_r(d,\, d) = 0, \quad \Psi_r(d,\, \delta) = 0, \quad \Psi_r(\delta,\, \delta) = 0. \qquad (34)$$

Взятые тройками, эти уравнения имеют комбинантную природу, т. е. остаются в целом неизменными, если $d$ и $\delta$ заменить двумя любыми другими векторами из того же заданного пучка $\varkappa d + \lambda\delta$. С другой стороны,

[1] В современных руководствах часто пишут букву Γ вместо скобок. — *Прим. ред.*

при перекомбинировании (34) по образцу (30) соответственно получается:

$$\begin{cases} d^2x_s + \sum\limits_{i,\,k} \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} dx_i dx_k = 0, \\ d\delta x_s + \sum\limits_{i,\,k} \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} \dfrac{dx_i\delta x_k + \delta x_i dx_k}{2} = 0, \\ \delta^2 x_s + \sum\limits_{i,\,k} \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} \delta x_i \delta x_k = 0. \end{cases} \tag{35}$$

На следующем шаге построения [Ω] за основу принимается выражение

$$\Omega = \delta\delta \sum a_{ik} dx_i dx_k - 2d\delta \sum a_{ik} dx_i \delta x_k + dd \sum a_{ik} \delta x_i \delta x_k. \tag{36}$$

Опять вооружаемся теми же доводами, которые приходилось уже применять при $n = 2$: $\Omega$ инвариантно по отношению к любым подстановкам (1), потому что составлено из заведомых инвариантов. Далее, оно содержит, в результате раскрытия, наряду с дифференциалами $d$, $\delta$, дифференциалы только еще второго порядка $d^2$, $d\delta$, $\delta^2$. Наконец, отметим полную инвариантность при линейных подстановках

$$d' = \varkappa d + \lambda\delta,\ \delta' = \mu d + \nu\delta,$$

пока мы принимаем $\varkappa\nu - \lambda\mu = 1$ (что соответствует понятию «комбинанта», в которое включаются неизменяемые формы, а не только системы уравнений, сохраняющие смысл). Легко при этом догадаться, что $\Omega$ — простейшее из всех выражений, для которых справедливы эти три высказывания.

И теперь получаем искомое [Ω]

$$[\Omega] = \sum (ik,\, rs) p_{ik} p_{rs}, \tag{37}$$

для конкретизации которого надо только в раскрытое выражение (36) подставить вместо $d^2$, $d\delta$, $\delta^2$ их значения из (35). Тогда, в самом деле, возникает форма только из первых дифференциалов $dx$, $\delta x$ — однородная второй степени по каждому из этих векторов — которая, кроме того, обладает свойством комбинанта и именно поэтому должна быть функций от $p_{ik}$, притом однородной второй степени. Коэффициенты же, которые мы кратко обозначаем $(ik,\, rs)$, содержат наряду с самими $a_{ik}$ их первые и вторые производные по компонентам $x$. Все рассчитанное выражение мы сейчас укажем в общем виде, но сразу заметим, что мы дальше этот общий вид нигде не используем, а в рассматриваемых частных случаях специальную форму $[\Omega]$ каждый раз удобнее получать заново.

При этом выводе $[\Omega]$ из $\Omega$ мы полностью следовали Риману. Липшиц же в своей уже цитированной выше работе в журнале Крелля 82 (1877) осуществляет тот же процесс чисто в формально-теоретическом русле, устраняя из $\Omega$ вторые дифференциалы не ссылкой на *уравнения* $\Psi_r = 0$, но вычитанием подходящей комбинации *выражений* $\Psi_r(d, d), \Psi_r(d, \delta), \Psi_r(\delta, \delta)$. В наших обозначениях его результат записывается так:

$$[\Omega] = \Omega - 2\left\{\sum a^{rs}\Psi_r(d, \delta)\Psi_s(d, \delta) - \sum a^{rs}\Psi_r(d, d)\Psi_s(\delta, \delta)\right\}. \quad (38)$$

Тут же убеждаемся, что дополнительный член правой части, хотя и не инвариантен относительно векторов $d$, $\delta$, но оказывается их комбинантом[1].

## § 6. Расчетная формула для римановой меры кривизны

Наконец, сошлюсь еще раз на определение римановой меры кривизны

$$K_R = -\frac{1}{2}\frac{[\Omega]}{F} = -\frac{\sum(ik, rs)p_{ik}p_{rs}}{2\sum(a_{ir}a_{ks} - a_{is}a_{kr})p_{ik}p_{rs}} \quad (22)$$

и приведу рассчитанные значения коэффициентов $(ik, rs)$ в том виде, как их дает сам Риман (стр. 402 Сочинений, 2-е изд.) в своей Парижской работе на премию, в таком виде эти формулы есть во многих книгах:

$$(ik, rs) = \frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial x_k \partial x_s} + \frac{\partial^2 a_{ks}}{\partial x_i \partial x_r} - \frac{\partial^2 a_{is}}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial^2 a_{kr}}{\partial x_i \partial x_s} + \\ + 2\sum_{t,u} a^{tu}\left(\binom{i\,r}{t}\binom{k\,s}{u} - \binom{i\,s}{t}\binom{k\,r}{u}\right). \quad (39)$$

[1] К сожалению, мы в этом тексте не можем проследить за теми связями с механикой, которые раскрывает Липшиц. Все же хотим обратить внимание на следующее: представим $x_i$ функциями «времени» $t$, т. е. дадим точке $(x)$ — которую мы снабжаем «массой 1» — возможность свободно двигаться с какой-то скоростью и ускорением, тогда в лице

$$\frac{1}{dt^4}\sum a^{rs}\Psi_r(d, d)\Psi_s(d, d)$$

имеем ту самую величину, которую еще Гаусс назвал *принуждением* в движении материальной точки. Липшиц даже соответственно выбрал название своей статьи. (К принципу наименьшего принуждения. Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwangs), однако, кажется, она до сих пор недооценена геометрами.

Эти формулы можно по-разному видоизменять, применяя квадратичные тождества $P = 0$, которые при $n \geqslant 4$ существуют между $p_{ik}$ (стр. 19,20). Приведенные выражения $(ik,\, rs)$ однозначно фиксированы тем, что они как коэффициенты числителя «нормированы», т. е. выбраны так, что между тремя $(ik,\, rs)$, использующими четыре различных значения индексов, существовало то же линейное соотношение, как между соответствующими $p_{ik}p_{rs}$. С учетом этих соотношений, между величинами $(ik,\, rs)$ оказывается $\frac{n^4 - n^2}{12}$ линейно независимых.

Аналогичная формула для компонентов нашего простейшего инварианта направления:

$$K_{ik} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_r \left(\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{Bmatrix} k\,r \\ r \end{Bmatrix}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{r,\,s}\left(\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix}\right)\right], \qquad (40)$$

где под $\{\ \}$ надо понимать символы Кристоффеля второго рода. Выражения этого вида и даже несколько более общие появляются впервые в работе Кристоффеля.

# D. Римановы $n$-мерные многообразия

# II. Нормальные координаты. Геометрические истолкования

До сих пор мы ставили на первый план развитие формальных выкладок из резюмированных в работе Римана на премию; теперь, напротив, обратимся к геометрическим соображениям, руководствуясь докладом Римана на право преподавания (1854).

## § 1. Римановы нормальные координаты и форма соответствующего $ds^2$

Речь снова пойдет об определенном расширении того, что мы уже делали при $n = 2$, начиная с целесообразно построенной системы координат (ср. стр. 185—186). В качестве начала координат $O$ выбираем произвольную точку в пределах рассматриваемого куска пространства. Далее представляем себе построенными все геодезические линии, исходящие из $O$ и заполняющие без пересечений некоторую конечную область вокруг $O$ (рассмотрением которой мы здесь и ограничиваемся).

Каждая точка области тогда характеризуется геодезическим расстоянием $\varrho$ от $O$ и направлением, в котором исходит из начала координат геодезическая, соединяющая его с данной точкой. Для связи с подходящим формализмом, подвергаем предварительно исходные координаты $x_i$ такому вспомогательному преобразованию, чтобы $ds^2$ в самой точке $O$ приняло вид $\sum dx_i^2$ (что, конечно, может быть достигнуто бесконечным множеством способов). Направление произвольной геодезической линии, исходящей из $O$, тогда можно характеризовать значениями $\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_o$. Наши новые координаты (*нормальные координаты Римана*) определяются формулами:

$$y_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_o \cdot \varrho. \tag{1}$$

Согласно этому

$$\varrho = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}, \tag{2}$$

а каждая геодезическая линия, исходящая из $O$, дается своим набором $(n-1)$ однородных линейных соотношений между переменными $y_i$; здесь мы видим аналогию прямоугольным координатам с той же фиксированной начальной точкой в евклидовом (точнее, в грассмановом) пространстве. В частности, наша система координат $y_i$ установлена только с точностью до произвольно принимаемой однородной линейной подстановки.

На следующем этапе формирования понятий появляются геодезические пространства $\nu$ измерений, $R_\nu$, связанные с O. Таковые представляются произвольно выбираемыми системами $(n-\nu)$ однородных линейных соотношений между $y_i$ — или, с другой точки зрения, результатом построения многообразий на базе той или иной системы $\nu$ линейно независимых векторов

$$d^{(1)}y,\ d^{(2)}y, \ldots, d^{(\nu)}y,$$

когда полагают

$$dy_i = \lambda_1 d^{(1)}y_i + \lambda_2 d^{(2)}y_i + \ldots + \lambda_\nu d^{(\nu)}y_i \tag{3}$$

и все эти векторы с разными коэффициентами геодезически продолжают. Ранее упоминавшийся случай геодезической «поверхности», проведенной из какой-то точки, включается сюда при $\nu = 2$.

Простейший пример такого геодезического $R_\nu$ получаем, положив нулю $(n-\nu)$ из координат $y_i$, скажем, $y_{\nu+1} \ldots y_n$.

При этом, прежде всего, справедливо важное утверждение, что неисчезнувшие координаты $y_1, \ldots y_\nu$ *для данного* $R_\nu$ *сами остаются нормальными координатами*. В самом деле, те исходящие из O геодезические линии пространства $R_n$, которые заполняют многообразие $R_\nu$, в нем тоже, очевидно, являются геодезическими. Кроме того, я хочу сформулировать *принцип подвижности системы нормальных координат*: каждое вообще отдельное $R_\nu$, которое мы решим рассматривать, подходящим выбором системы координат $y$ можно подчинить определению $y_{\nu+1} = 0, \ldots, y_n = 0$. Опять-таки это наглядно получается, поскольку ортогональные преобразования, которым можно подвергать $y$, содержат достаточное число произвольных параметров (даже и новые $y$ определены только с точностью до тех ортогональных преобразований, которым можно подвергать $y$, содержат достаточное число произвольных параметров (даже и новые $y$ определены только с точностью до тех ортогональных преобразований, которым я мог бы по отдельности подвергнуть наборы неисчезнувших $y_1 \ldots y_\nu$ и исчезнувших $y_{\nu+1} \ldots y_n$).

После этих предварительных замечаний легко указать общую форму, которую должен принимать $ds^2$, когда в основу кладутся нормальные координаты $y_i$.

Рассмотрим сначала подпространство двух измерений, на котором исчезают все $y_i$, кроме $y_1$, $y_2$. Согласно формуле (21), стр. 199 для этого подпространства должно быть:

$$ds^2 = (dy_1^2 + dy_2^2) + \mathfrak{P}(y_1, y_2)(y_2 dy_1 - y_1 dy_2)^2, \tag{4}$$

где $\mathfrak{P}(y_1, y_2)$ выражается каким-нибудь рядом по целым положительным степеням $y_1$, $y_2$, который сходится в окрестности O. К этому виду должен, следовательно, сводиться $ds^2$ нашего $R_n$, если $y_3 \ldots y_n$ считать нулями. — Более того, к такому же виду должен сводиться $ds^2$, по принципу подвижности системы координат, после того как мы сперва подвергаем $y_1 \ldots y_n$ какому-нибудь однородному преобразованию и уже *новые* $y_3 \ldots y_n$ приравниваем нулю. Чисто алгебраически отсюда следует, что $ds^2$ во всем $R_n$ приводится к виду:

$$ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \mathfrak{P}_{ik,\,rs}(y_1 \ldots y_n)(y_i dy_k - y_k dy_i)(y_r dy_s - y_s dy_r), \tag{5}$$

где $\mathfrak{P}_{ik,\,rs}$ изображаются некоторыми рядами по используемым аргументам, сходящимися в окрестности O.

Прекрасно, что и обратно любые такие ряды, если только сходятся, приемлемы для нас. Для проверки убеждаемся сначала, что при подстановке $ds^2$ в виде (5) ранее составленные уравнения геодезических линий $\Psi_r = 0$ всегда выполняются, если в соответствии с (1) дифференциалы $dy_i$ считать пропорциональными $y_i$, а $d^2 y_i$ приравнять нулю; тогда полное геодезическое расстояние, отсчитываемое от O, в каждой точке равно $\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$.

Естественно, при помощи квадратичных тождеств, связующих миноры $(y_i dy_k - y_k dy_i)$ между собой, можно опять нормировать формулу (5) так, чтобы соблюдалось

$$\mathfrak{P}_{12,34} + \mathfrak{P}_{13,42} + \mathfrak{P}_{14,23} \equiv 0 \quad \text{и т. д.} \tag{6}$$

В дальнейшем мы все время полагаем эту нормировку выполненной. Это относится, в частности, к постоянным членам $\mathfrak{P}_{ik,rs}$, обозначаемым далее $\alpha_{ik,rs}$.

## § 2. Рассмотрение ближайшей окрестности O. Общее геометрическое истолкование $K_R$

Ограничив сейчас наше рассмотрение ближайшей окрестностью точки $O$, заменяем степенные ряды $\mathfrak{P}$ их начальными членами и вместо (5) пишем приближенно:

$$ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \alpha_{ik,rs}(y_i dy_k - y_k dy_i)(y_r dy_s - y_s dy_r). \tag{7}$$

В самой точке $O$ при этом

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum dy_i^2, \\ F &= \sum p_{ik}^2 \quad (\text{где} \quad p_{ik} = dy_i \delta y_k - dy_k \delta y_i). \end{aligned} \tag{8}$$

Затем для произвольно выбранного пучка $\varkappa d + \lambda\delta$ геодезических линий исходящих из $O$, имеем в силу уравнений $\Psi_r = 0$:

$$d^2 y_i = 0, \quad d\delta y_i = 0, \quad \delta^2 y_i = 0.$$

Тогда расчет $[\Omega]$ столь же прост, как это было для $n = 2$ на стр. 185. В результате для римановой меры кривизны в точке $O$ получается компактное выражение:

$$K_R = -3\frac{\sum \alpha_{ik,rs} p_{ik} p_{rs}}{\sum p_{ik}^2}. \tag{9}$$

Эта формула — как и в случае $n = 2$ — непосредственно отражает те отклонения, которые представляет $ds^2$ в (7) в сравнении с евклидовым случаем.

Общее геометрическое истолкование римановой меры кривизны получится тотчас из рассмотрения отдельного случая, если опереться на ее свойство инвариантности. Рассматриваем же мы подпространство $R_2$, на котором исчезают все $y_i$, кроме $y_1$, $y_2$ (на геодезических линиях которого, следовательно, все $\delta y_i$ при $i > 2$ также равны нулю). Выражение $ds^2$ дается согласно (7):

$$ds^2 = (dy_1^2 + dy_2^2) + \alpha_{12,12}(y_1 dy_2 - y_2 dy_1)^2, \tag{10}$$

а соответствующая риманова мера кривизны согласно (9) принимает значение

$$K_R = -3\alpha_{12,\,12}, \tag{11}$$

совпадая, таким образом, с гауссовой мерой кривизны для дифференциальной формы (10), при отнесении расчета к началу координат. Итак, приходим к заключению:

*Инвариант пучка, называемый нами римановой мерой кривизны, есть не что иное, как гауссова мера кривизны той геодезической поверхности (капюшона), которая образуется геодезическим продолжением пучка векторов $\varkappa d + \lambda\delta$.*

Это определение и дает Риман точно так в своем докладе на право преподавания. Тем, что мы заранее обратили внимание на (еще в предыдущем разделе) на инвариантность закона составления $K_R$, мы придали как раз обратную направленность указаниям, которые непосредственно напрашивались из текста доклада на право преподавания вместе с сочинением на премию. Это способствовало у нас открытости всех соответствующих доводов.

## § 3. Геометрическое истолкование локального инварианта $K$

В § 3 предыдущего раздела (стр. 200) мы из выражения римановой меры кривизны вывели достаточно простой инвариант направления:

$$\sum K_{ik}dx_idx_k : \sum a_{ik}dx_idx_k$$

и еще локальный инвариант $K$. Сообразно своим определениям, то и другое, будучи отнесено к начальной точке O, записывается в нормальных координатах на основе (7) и без особых выкладок допускает тогда красивую интерпретацию, которую обосновал недавно Герглоц (в декабрьском выпуске Leipziger Berichte 1916).

Начнем с $K$. Так как в (5) уже принято для всех $a_{ii}$ в O значение 1 и для всех прочих $a_{ik}$ значение 0, то согласно формуле (24) (стр. 200) для той же точки $O$:

$$K = -\frac{3\sum \alpha_{ik,\,ik}}{n(n-1):2}. \tag{12}$$

Здесь появляется $\dfrac{n(n-1)}{2}$, это просто число «связующих стенок» $(i,\,k)$ внутри «$n$-ножника» полуосей $y_1 \dots y_n$, тогда как — $3\alpha_{ik,\,ik}$ есть значение гауссовой меры кривизны для данной стенки как пучка векторов. Поэтому можно сказать: $K$ — это среднее из всех указанных значений гауссовой кривизны. При этом $K$ по своей сути не зависит от выбора $n$-ножника исходящих из $O$ полуосей $y_1 \ldots y_n$. В этом смысле можем называть $K$ просто *средней гауссовой кривизной в точке* $O$[1]. Таков первый результат Герглоца, который мы здесь еще дополним некоторыми сопутствующими рассуждениями:

Данная интерпретация $K$ обеспечивает, что сумма $\sum \alpha_{ik,\, ik}$ должна быть инвариантной при произвольных ортогональных преобразованиях $y$. Это можно быстро проверить алгебраически. Действительно, при ортогональной замене $y$ сумма $\sum p_{ik}^2$ также переходит в себя, т.е. и величины $p_{ik}$ претерпевают ортогональную подстановку (естественно, специального класса), при которой $\sum \alpha_{ik,\, ik}$ ведет себя как простейший инвариант квадратичной формы $\sum \alpha_{ik,\, rs} p_{ik} p_{rs}$. Замечания другого рода связаны со свойством совокупности равенств $P = 0$ оставаться неизменной при обсуждаемых линейных подстановках $p_{ik}$, т.е. речь идет о линейном перекомбинировании выражений $P$. Если привлекать для доказательства те дифференциальные уравнения[2] в частных производных, которым должны удовлетворять любые инварианты, остающиеся неизменными при ортогональных заменах $y$, то обнаруживается, что при «нормировании» $\alpha_{ik,\, rs}$ (т.е. при подчинении линейным соотношениям, которые параллельно действуют в виде равенств $P = 0$ см. выше стр. 208) $\sum \alpha_{ik,\, ik}$ остается даже единственной инвариантной линейной комбинацией коэффициентов $\alpha_{ik,\, rs}$ квадратичной формы $\sum \alpha_{ik,\, rs} p_{ik} p_{rs}$. Этот факт нам ниже пригодится для несколько иной интерпретации $K$ с привлечением понятий объема и поверхности малого шара, описанного около O как центра. Такую интерпретацию, примыкающую к уже сказанному на стр. 201 для $n = 2$, уже давно предлагал мне Рунге (Runge). В связи с этим Вермейл (Vermeil) по моей просьбе выполнил требуемые вычисления, которые я резюмирую следующим образом:

*a*) Вместо $y_1 \ldots y_n$ вводим полярные координаты, которые я ради краткости представляю здесь только при $n = 4$:

$$\begin{gathered} y_1 = \varrho \cos\theta, \quad y_2 = \varrho \sin\theta \cos\varphi, \\ y_3 = \varrho \sin\theta \sin\varphi \cos\psi, \quad y_4 = \varrho \sin\theta \sin\varphi \sin\psi. \end{gathered} \tag{13}$$

*b*) После этого легко убеждаемся, что объем очень малого геодези-

[1]Это понятие не имеет, конечно, отношения к понятию «средней кривизны», распространенному в теории поверхностей.

[2]Таким образом, рекомендуется проверять инвариантность на частном примере бесконечно малых поворотов вида $y_1' = y_1 + \varepsilon y_2$, $y_2' = y_2 - \varepsilon y_1$, $y_3' = y_3 \ldots$. Кстати, с таким же успехом можно пользоваться дискретными поворотами на 90° вида $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$, $y_3' = y_3$ и т.д. В любом случае достаточно проверки при $n = 4$, распространение же результата на большие $n$ осуществляется автоматически, как при выводе (5). — *Прим. перев.*

ческого шара (при расчете мы имеем право пользоваться сокращенной формой (7) для $ds^2$) связан с объемом $J$ евклидова шара того же радиуса формулой следующего вида:

$$V = J + (\text{однородная лин. функция } \alpha_{ik,\,rs}) \cdot \varrho^2 J. \tag{14}$$

*c*) Здесь и используется упоминавшийся факт, что встретившаяся инвариантная линейная функция должна с точностью до постоянного коэффициента совпадать с $\sum \alpha_{ik,\,ik}$; остается определить этот коэффициент, что достигается на возможно более простом примере расчета объемов.

*d*) Опуская детали выкладок, привожу здесь только окончательный результат

$$V = J + \frac{\sum \alpha_{ik,\,ik}}{2(n+2)} \cdot \varrho^2 J = J - \frac{n(n-1)}{6(n+2)} K \cdot \varrho^2 J. \tag{15}$$

*e*) Отсюда искомая интерпретация $K$:

$$K = -\frac{6(n+2)}{n(n-1)} \lim_{\varrho=0} \left( \frac{V-J}{\varrho^2 J} \right), \tag{16}$$

что соответствует прежней формуле для $n = 2$ (27), стр. 201.

*f*) Если мы хотим знать не объем шара, а площадь его поверхности, нужно только продифференцировать объем по $\varrho$. Тогда получается (если под $F$ понимать поверхность евклидова шара[1]:

$$K = -\frac{6}{n-1} \lim_{\varrho=0} \left( \frac{O-F}{\varrho^2 F} \right). \tag{17}$$

*g*) Ради полноты еще замечу, что, как известно[2], $J$ дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} &1.\ \text{для четного } n \quad (n = 2\nu) : J = \frac{\pi^\nu \varrho^n}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \\ &2.\ \text{для нечетного } n \quad (n = 2\nu+1) : J = \frac{\pi^\nu \varrho^n}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \left( \frac{2\nu+1}{2} \right)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Это по-разному интерпретированное $K$ для дальнейшего целесообразно помечать размерностью пространства и обозначать как $K^{(n)}$. Тогда

[1]Буква же O (от Oberfläche — поверхность) означает здесь площадь поверхности геодезического шара. — *Прим. перев.*

[2]Ср., например, Schoute: Mehrdimensionale Geometrie. Bd. 2, S. 288. Leipzig, составитель серии Schubert.

без специальных напоминаний каждый раз ясно, что в той же точке О под $K^{(n-1)}$ следует понимать такую же осредненную кривизну, но для геодезического пространства $R_{n-1}$, проходящего через О. Примеры дадим чуть ниже.

Замечу еще ради точности формулировок, что $K^{(1)}$ попросту равно 0. Соответственно при $n = 1$ обе величины $V$ и $J$ равны $2\varrho$.

## § 4. Геометрическое истолкование простейшего инварианта направления. Переход к осредненному значению кривизны $K^{(n-1)}$

Опираясь на (7), рассчитаем теперь для точки О значение нашего простейшего инварианта направления:

$$\frac{\sum K_{ik}^{(n)} dx_i dx_k}{\sum a_{ik} dx_i dx_k} = \tag{19}$$
$$= -3\frac{dy_1^2(\alpha_{12,\,12} + \ldots \alpha_{1n,\,1n}) + 2dy_1 dy_2(\alpha_{13,\,23} + \ldots \alpha_{1n,\,2n}) + \ldots}{(n-1)\sum dy_i^2}.^{\star}$$

По принципу подвижности системы нормальных координат достаточно дать геометрическую интерпретацию для отдельного направления $dy$, чтобы затем непосредственно получить общий результат. Приравняв все $dy_i$, кроме $dy_1$, нулю, получаем в правой части (19):

$$-3\frac{\alpha_{12,\,12} + \ldots + \alpha_{1n,\,1n}}{(n-1)}. \tag{20}$$

Снова получилось некоторое среднее значение гауссовой кривизны, именно, по каким-то $(n-1)$ пучкам, проходящим через вектор $dy_1, \ldots dy_n$ перпендикулярно друг другу.

Этот второй результат Герглотца мы, как и он сам, еще подвергаем некоторой простой переформулировке. Выражение $\alpha_{12,\,12} + \ldots + \alpha_{1n,\,1n}$ переписываем в виде следующей разности:

$$\sum_{i,\,k=1\ldots n} \alpha_{ik,\,ik} - \sum_{i,\,k=2\ldots n} \alpha_{ik,\,ik}. \tag{21}$$

Таким путем (20) превращается в

$$\frac{n}{2}K^{(n)} - \frac{n-2}{2}K^{(n-1)}, \tag{22}$$

где под $K^{(n-1)}$ надо понимать среднюю гауссову кривизну для того $R_{n-1}$, которое задается посредством $y_1 = 0$. Соответствующая, надлежаще понимаемая формула имеет силу для каждого направления $dy_1 \ldots dy_n$. Вернувшись снова к общим координатам $x_1 \ldots x_n$, выражаем результат следующим образом:

При понимании $K^{(n-1)}$ как среднего значения гауссовой кривизны подпространства $R_{n-1}$, перпендикулярного направлению $dx_1, \ldots, dx_n$ в смысле нашего мероопределения, имеет место

$$\frac{\sum K_{ik}^{(n)} dx_i dx_k}{\sum a_{ik} dx_i dx_k} = \frac{n}{2} K^{(n)} - \frac{n-2}{2} K^{(n-1)}. \tag{23}$$

Разрешив это равенство относительно $K^{(n-1)}$, находим:

$$K^{(n-1)} = \frac{nK^{(n)} \sum a_{ik} dx_i dx_k - 2 \sum K_{ik}^{(n)} dx_i dx_k}{(n-2) \sum a_{ik} dx_i dx_k}. \tag{24}$$

Этим подтверждается, что $K^{(n-1)}$ — инвариант направления.

Имея в виду будущие приложения, мы предпочитаем писать (опять следуя Герглотцу)

$$K^{(n-1)} = \frac{\sum G_{ik} dx_i dx_k}{\sum a_{ik} dx_i dx_k} \tag{25}$$

и тем самым как бы предвосхищаем важную роль вводимого тензора $G_{ik}$ при $n = 4$ в теории тяготения Эйнштейна. При этом следует заметить, что у самого Эйнштейна фигурирует только тензор $K_{ik}$, а тензор $G_{ik}$ занял свое ключевое положение уже потом благодаря исследованиям Гильберта. Между прочим, нужно понять, что все эти цитируемые утверждения воспринимаются cum grano salis (с перчинкой) именно, с точностью до числовых множителей и знаков, которые в пределах нашего изложения выступают унифицировано, но другие авторы могут распорядиться ими по-своему из-за какой-то специфики контекста.

Кое-что должно быть еще упомянуто. Такие $ds^2$, какие при $n = 4$ лежат в основе теории Эйнштейна, тоже имеют (как формы от $dx_1$, $dx_2$, $dx_3$, $dx_4$) ненулевой определитель, но относятся к неопределенным по знаку: точнее говоря, этим формам соответствует, в смысле закона инерции, комбинация знаков $+++-$ (ср. рассматривавшуюся на протяжении предыдущей главы форму $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$, связанную с группой Лоренца). Это не нарушает смысла сказанного о нормальных координатах и средних значениях; надо только все время принимать во внимание один отклоняющийся знак. Напротив, интегрирование Вермейла по бесконечно малому шару отпадает, так как уравнением $ds^2 = \mathrm{const}$ вместо шара описывается гиперболоидальное многообразие, которое уходит на бесконечность, асимптотически приближаясь к конусу $ds^2 = 0$.

## § 5. Проблема эквивалентности в пространствах нулевой или вообще постоянной римановой меры кривизны

По аналогии с тем, что мы построили для $n = 2$, сейчас должны были бы последовать указания к решению проблемы эквивалентности двух разных $ds^2$ (с $n$ переменными). Однако с детальными разъяснениями здесь приходится несколько подождать, поскольку в нашем распоряжении нет еще ряда вспомогательных понятий, которые как раз далее предстоит разработать. Точно так же мы мало подготовлены к описанию таких $ds^2$, которые переводятся в себя непрерывными множествами преобразований (образующих тогда группы с конечным числом параметров). Пока что речь пойдет только о случаях, когда риманова мера кривизны либо тождественно исчезает, либо принимает какое-то другое постоянное значение (не зависящее ни от $p_{ik}$, ни от $x_1 \ldots x_n$).

Примеры таких случаев у нас непосредственно под руками:

1. *«Евклидово» пространство $n$ измерений*, в котором $ds^2$, выписанный в нормальных координатах, принимает простую форму

$$ds^2 = \sum dy_i^2, \tag{26}$$

тогда как дальнейшие члены в формуле (5) отсутствуют и риманова мера кривизны очевидным образом обращается в нуль. Данный $ds^2$ сохраняется не только при ортогональных подстановках $y_i$, но и при добавлении к $y_i$ произвольных постоянных $c_i$, что вместе дает группу с $\dfrac{n(n+1)}{2}$ параметрами: группу евклидовых движений. Далее:

2. *Внутренняя геометрия $n$-мерной сферы, вложенной в евклидово пространство $(n+1)$ измерений.*—Представим себе в указанном пространстве систему обычных прямоугольных координат

$$z,\ z_1,\ z_2, \ldots, z_n.$$

Уравнением сферы с центром в $O$ является

$$z^2 + z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = a^2, \tag{27}$$

и внутренние расстояния на этой сфере остаются, конечно, неизменными при применении группы $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$ (однородных линейных) ортогональных подстановок координат $z, z_1, \ldots, z_n$. Далее нужно, чтобы (27) тождественно удовлетворялось при приписывании $z, z_1, \ldots, z_n$ какой-нибудь функциональной зависимости от меньшего числа $n$ других переменных $x_1 \dots x_n$. Тогда $ds^2$ прежнего, $(n+1)$-мерного пространства, $ds^2 = dz^2 + dz_1^2 + \dots + dz_n^2$ превратится в квадратичную форму дифференциалов

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k, \tag{28}$$

также преобразующуюся в себя подстановками некоторой группы с $\frac{n(n+1)}{2}$ параметрами. Каждую точку $(x)$ в пределах той области, где $z$ мыслятся однозначными функциями $x$, можно этими преобразованиями перевести в любую другую точку и точно также исходящий из точки $(x)$ пучок $\varkappa d + \lambda\delta$ перевести в любой другой пучок. Поэтому риманова мера кривизны (28) неизбежно сводится к *постоянному* значению.

Кажется проще всего ввести параметры $x_1 \dots x_n$ в виде обычных полярных координат, следовательно, по схеме, которую я ради кратности привожу здесь только для $n = 3$ (ср. (13), стр. 210):

$$\begin{gathered} z = a\cos\theta,\ z_1 = a\sin\theta\cos\varphi, \\ z_2 = a\sin\theta\sin\varphi\cos\psi,\ z_3 = a\sin\theta\sin\varphi\sin\psi. \end{gathered} \tag{29}$$

Наше $ds^2$ (28) принимает тогда следующий вид:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2\sin^2\theta d\varphi^2 + a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi d\psi^2. \tag{30}$$

Для перехода к римановым нормальным координатам принимаем теперь:

$$\varrho = a\theta,\ y_1 = \varrho\cos\varphi,\ y_2 = \varrho\sin\varphi\cos\psi,\ y_3 = \varrho\sin\varphi\sin\psi, \tag{31}$$

где $\varrho$, как и должно быть, равно $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. Тотчас находим:

$$d\varrho^2 = \sum dy_i^2 - \frac{\sum(y_i dy_k - y_k dy_i)^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \tag{32}$$

$$ds^2 = d\varrho^2 + a^2\left(\sin\frac{\varrho}{a}\right)^2 \frac{\sum(y_i dy_k - y_k dy_i)^2}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2}. \tag{33}$$

В последней сумме нет разрыва в точке $O$, напротив, это $ds^2$ разлагается в ряд по целым положительным степеням $y_i$ так, что при выделении начальных членов:

$$ds^2 = \sum dy_i^2 - \frac{1}{3a^2}\sum(y_i dy_k - y_k dy_i)^2. \tag{34}$$

Вывод: *Риманова мера кривизны принимает для точки $O$ независимо от выбора пучка $\varkappa d + \lambda\delta$ и, далее, ввиду существования группы $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$, для любой другой точки $(y)$ и любого пучка всегда одно и то же значение*:

$$K_R = \frac{1}{a^2}. \tag{35}$$

Перевод этого рассуждения на язык геометрических терминов способен только придать ему другую форму; по существу же не может измениться ни путь расчета для получения результата (35) из формул (32), (33), ни то, что касается равноправия произвольной точки $(y)$ с точкой $O$. В упомянутых формулах радиус исходной сферы может быть даже чисто мнимым, это будет равносильно получению в (35) отрицательного значения $K_R$ для данного многообразия постоянной кривизны.

Заметим здесь, что использование (32), (33) для представления элемента дуги дает удобную позицию для анализа и различения пространственных форм постоянной кривизны с точки зрения проективной геометрии. Случай нулевой кривизны включается как переходный, в котором $a$ устремляется к бесконечности. Впрочем, как мы уже отмечали при $n = 2$, если мы хотим проследить, как устроены эти пространства в целом, то надо считаться с дополнительными подразделениями, которые охватываются мысленным взглядом лучше, если не начинать с бесконечно малого, а обратиться к общим положениям проективной геометрии[1].

С предыдущими объяснениями мы освоили только более легкую половину тех указаний, которые дал Риман в своем докладе на право преподавания. Не в том, чтобы из (26) или (32), (33) вывести $K_R = O$ или $K_R = \frac{1}{a^2}$, а, наоборот, чтобы от принятия $K_R = O$ или $K_R = \frac{1}{a^2}$ перейти с необходимостью к соответствующим формам $ds^2$, состоит главная задача. Риман лишь открыл нам направление своего хода мыслей и удовольствовался указанием самого факта. Первое, еще довольно громоздкое доказательство дал Липшиц в журнале Крелля 70, 72 (1869), (1870). Более простыми оказались комментарии, которыми Вебер сопроводил по этому поводу работу Римана (1892). Еще одно доказательство, отправляясь от общих исследований Кристоффеля по поводу эквивалентности двух квадратичных форм, дал Бианки в (5), VII 2 Rendiconti dell'Academia dei Lincei (1897). Я изложу здесь кратко доказательство более общего, но вполне элементарного утверждения, которое я обдумал с Эммой Нетер и господином Вермейлом. Из него обсуждаемые утверждения касательно $K_R = O$ и $K_R = \frac{1}{a^2}$ получаются просто как следствия.

Вернемся к основанному на нормальных координатах разложению (5), стр. 207

$$ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \mathfrak{P}_{ik,\,rs}(y_i dy_k - y_k dy_i)(y_r dy_s - y_s dy_r),$$

[1]Мы именно потому снова обращаем внимание на подобное положение дел, что оно оставляется в стороне распространенными учебниками по неевклидовой геометрии (например, B. Bianchi-Lukat, Bonola-Liebmann и т. д.).

где под $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ можно понимать произвольные ряды по положительным степеням $y$ (эти ряды подчинены только условию сходимости для достаточно малых значений $y$). С другой стороны, пусть вычислены коэффициенты $(ik, rs)$ дифференциальной формы $[\Omega]$, связанной с кривизной

$$[\Omega] = \sum(ik, rs)(\delta y_i dy_k - \delta y_k dy_i)(\delta y_r dy_s - \delta y_s dy_r);$$

согласно (37), стр. 203, они сходным образом представляются степенными рядами. Но величины $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ можно по-разному модифицировать, не меняя $ds^2$ на самом деле. Для этого служат, прежде всего, тождества, связующие между собой $p_{ik}$, $p_{rs}$ с различными индексами

$$p_{ik}p_{rs} + p_{ir}p_{sk} + p_{is}p_{kr} = 0;$$

мы их раньше уже привлекали для оптимального выбора одних только постоянных членов в $\mathfrak{P}_{ik,rs}$. Однако есть еще более простые соотношения, только с 3 индексами:

$$y_i p_{kr} + y_k p_{ri} + y_r p_{ik} = 0.$$

Используя эти тождества, мы можем нормировать $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ в определенном, здесь ближе не поясняемом, смысле. Наконец, отметим, что коэффициенты $(ik, rs)$ тоже представляют собой ряды и что между ними обнаруживаются соотношения, создающие точный параллелизм с соотношениями между $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ при нормировании последних.

Из закона образования $[\Omega]$ следует тогда обещанная теорема, *именно что ряды для нормированных $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ можно почленно определить однозначным образцом по заданным рядам для* $(ik, rs)$. Последовательное определение членов рядов приводит к серии формул, из которых первые соответствуют формуле (9) стр. 208, если ее переписать в виде

$$a_{ik,rs} = \frac{1}{6}(ik, rs)_{0,0,\ldots,0}. \tag{36}$$

Как важное следствие теоремы получаем, что нормированные $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ полностью исчезают, если принять $K_R \equiv O$, и что получаются как раз формулы (32), (33), если исходить из $K_R \equiv \dfrac{1}{a^2}$.

Вполне можно предположить, что это схематическое изложение передает ход мыслей, которым руководствовался сам Риман в своем докладе на право преподавания. Кратко ведь упоминается положение (стр. 282 Сочинений, 2-е изд.), что мерой кривизны полностью определяются метрические соотношения на многообразии: отсюда тянется цепь высказываний, в которой угадывается параллелизм с предложенными сейчас разработками. В особенности звучит понятно, когда он касательно многообразий постоянной кривизны *l.c.* продолжает: «поэтому метрические соотношения вокруг одной точки по всем направлениям точно те же, как вокруг другой, а фигурам, следовательно, в многообразиях постоянной кривизны можно придавать какое угодно положение».

Мы, чтобы сделать наглядно доступным существование группы $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$ преобразований, переводящих многообразие постоянной кривизны в себя, обратились в начале параграфа к рассмотрению $n$-мерной сферы $(n+1)$-мерного евклидова пространства. Согласно же процитированному указанию Римана это, конечно, имеет только педагогическое значение, существование автоморфизмов там обнаруживается само собой, без вывода из «внутренней» геометрии $R_n$. Впрочем, Риман наверняка о примере сферы думал. В самом деле, форма элемента дуги постоянной кривизны

$$ds = \frac{\sqrt{\sum dx^2}}{1 + \frac{K}{4}\sum x^2}, \tag{37}$$

указанная им *l.c.* далее, известна как непременно появляющаяся при установлении соотношения между сферой и евклидовым пространством $x$ обычной стереографической проекцией.

# E. Некоторые сведения о дальнейшем развитии после Римана

## §1. Характеристика личностей, выступивших около 1870, и их последующего влияния

В предыдущем мы уже так или иначе ссылались на работы Бельтрами, Кристоффеля и Липшица, рекомендуя при этом четкие теоретические формулировки как зрелый плод работ Липшица. Сейчас мы попытаемся доложить об этом обстоятельнее, но прежде надо сказать кое-что об особенностях этих личностей и условиях, в которых они действовали.

Бельтрами исходит первоначально из теории поверхностей, а позже, начиная с 1869, существенно поворачивается к математической физике. Пробуя и там выявить значение дифференциальных форм, он отдает предпочтение при развитии теории тем подстановкам проблем и методам, которые уже нашли свое развитие в физике и механике. Отсюда постоянное выдвижение на первое место вариационных принципов и интегральных формулировок, о чем еще нужно поговорить в дальнейшем.

Также и у Липшица взаимоотношение между механикой и вариационным исчислением играет важную роль. Все развитие, которое претерпела эта дисциплина от Лагранжа через Якоби, он предполагает известным. В этом, возможно, лежит одна из причин, почему его работы до сих пор привлекли довольно мало внимания со стороны геометров и алгебраистов. Им кажется удобным Кристоффель, который использует только алгебраические преобразования и дифференцирования. Добавим к этому еще кое-что. Липшиц был очень добросовестным учителем, но не умел увлекать, что Кристоффелю было присуще в высшей степени; приглашенный в 1869 из Берлинского ремесленного училища в Цюрихский политехникум, он в том и другом месте оставим после себя длительно действовавшие стимулы к дальнейшей работе на проторенных им путях. В Берлине память о нем живет и сегодня в возглавлявшейся одно время Вайнгартеном (Weingarten) школе по теории поверхностей. Из Цюриха же его влияние простерлось на Италию, где Бианки пошел по его стопам и его мысли нашли еще привлекательное дальнейшее продолжение благодаря Риччи. Риччи развил ради теории инвариантов квадратичных дифференциальных форм особое исчисление, которое он назвал «абсолютным дифференциальным исчислением»; хорошо разработанное представление последнего с многочисленными приложениями к разнообразнейшим вопросам геометрии, механики и физики можно найти в статье, составленной им вместе с Леви-Чивита в т.54 Mathematische Annalen (1900—1901). Разработки своего соотечественника Бельтрами, которые действительно дают только специальные инварианты (см. ниже), Риччи выразительно отвергает как «слишком искусственные».

Способ изложения Кристоффеля-Риччи получил дальнейшее распространение. В монографии Эдмунда Райта (Edmund Wright) «Инварианты квадратичной формы» («Invariants of a quadratic form». Cambridge tracts, 1908) он занимает почетное место (в то время как о Римане упоминается только мимоходом, а о Липшице вообще даже нет речи). Точно так же, например, Эйнштейн воспитывался в традициях Кристоффеля-Риччи.

Мы завели здесь речь о подобных вещах, поскольку без их осознания кажется невозможным истинное понимание соответствующей литературы. Несмотря на все Jahresberichte (годичные реферативные обзоры) и Энциклопедии, несмотря на весь персональный обмен идеями, ставший возможным благодаря математическим конгрессам, на направленность непрерывно продолжающихся математических исследований кладет отпечаток прихотливая традиция и школьное образование.

## § 2. Образование инвариантов у Бельтрами

### $a$) Метод вариационного исчисления

Одной из старых задач математической физики является перевычисление выражения $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (которое Ламе назвал «вторым дифференциальным параметром» от $u$) в произвольных криволинейных координатах. Простейшее предписание для этого дал (обобщая методы Лагранжа) Якоби в журнале Крелля т.36 (1848) в статье: О частном решении уравнения $\Delta_2 u = 0$ (Über eine partikuläre Lösung der Gleichung $\Delta_2 u = 0$; Сочинения II, стр. 193 и след.). Сперва пересчитывают в новых координатах $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, а по нему «первый» дифференциальный параметр $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$. К искомой формуле для $\Delta_2$ приводит тогда замечание, что интеграл

$$\iiint \Delta_1 u dx dy dz, \tag{1}$$

распространенный по какой-либо области пространства, имеет для нее инвариантный смысл и что соответственно вариация, образуемая при фиксации граничных значений

$$\delta\overline{\underline{\iiint}} \Delta_1 u dx dy dz = -2\overline{\underline{\iiint}} \Delta_2 u \delta u dx dy dz \tag{2}$$

точно так же инвариантна.

Бельтрами же в 1868 (Об общей теории дифференциальных параметров. Sulla theoria generale dei parametri differentiali, Memorie di Bologna (2)VIII = Соч. I) перенес это предписание на пространство $n$ переменных с произвольно заданным элементом дуги $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$. Как и раньше, мы обозначаем определитель, соответствующий $ds^2$, через $a$, а коэффициенты взаимной формы через $a^{ik}$. «Первым дифференциальным параметром» функции $u$ тогда должно быть выражение

$$\Delta_1 u = \sum a^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{3}$$

Вместо интеграла (1) выступает

$$\iint \ldots \int \Delta_1 u \sqrt{a} dx_1 \ldots dx_n \tag{4}$$

при интегрировании по произвольной $n$-мерной области. Определение «второго дифференциального параметра» $\Delta_2 u$ теперь раскрывается через вариацию интеграла с граничной фиксацией:

$$\delta\overline{\underline{\iint \ldots \int}} \Delta_1 u \sqrt{a} dx_1 \ldots dx_n = -2 \iint \ldots \int \Delta_2 u \delta u \sqrt{a} dx_1 \ldots dx_n. \tag{5}$$

Отсюда по правилам вариационного исчисления следует

$$\triangle_2 u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \frac{\partial \left( \sqrt{a} \sum\limits_k a^{ik} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \right)}{\partial x_i}, \tag{6}$$

и это выражение само представляет собой инвариант, поскольку получено инвариантными действиями.

Разъясненный здесь метод образования инвариантов в дальнейшем еще много раз покажет свои преимущества.

Мы хотим при этом тут же подчеркнуть, что иррациональность $\sqrt{a}$ в $\triangle_2 u$ только кажущаяся, исчезающая сама собой после выполнения указанных в (6) дифференцирований. — Можно, кстати, как это и сделал сам Бельтрами, естественным образом подтвердить инвариантность (6) по отношению к произвольным преобразованиям координат посредством прямого нахождения производных. Характерное преобразование, с помощью интегрирования по частям, диктуемое вариационным исчислением при переходе от (5) к (6), желательно было бы заменить более непосредственным составлением некоего алгебраического тождества. Такое мы выше на стр. 167 делали для интеграла наименьшего действия в связи с эволюцией системы отдельных точечных масс, выполняя переход к «центральному уравнению» Лагранжа. Однако, кажется, для кратных интегралов, с которыми мы сейчас и в дальнейшем имеем дело, это еще никем не выполнено.

### *b*) Метод интегральных соотношений

Обобщением только что решенной задачи нахождения второго дифференциального параметра скалярной функции $u$ является такая, в которой требуется составить дивергенцию какого-либо произвольно заданного векторного поля в $n$-мерном пространстве. В отличие от предыдущей главы, где мы оперировали исключительно с ортогональными координатами, мы должны теперь распознавать, подразумевается ли у компонентов векторов когредиентность или контрагредиентность к $dx_i$. В обсужденном выше специальном случае компоненты $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ контрагредиентны, аналогично можно и в общем случае принять контрагредиентность неизвестных компонентов, которые мы обозначаем

$$u_1, u_2, \ldots, u_n. \tag{7}$$

Прежде всего, конечно, их определенной операцией можно превратить в когредиентные

$$\xi_i = \sum a^{ik} u_k. \tag{7'}$$

Далее, можно и так поступить: Используя определитель Грассмана, строим инвариант:

$$d\omega = \sqrt{a}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_n \\ d^{(1)}x_1 & d^{(1)}x_n \\ d^{(n-1)}x_1 & d^{(n-1)}x_n \end{vmatrix} \tag{8}$$

(где $d^{(1)}\ldots d^{(n-1)}$ означают $(n-1)$ каких-либо когредиентных дифференциалов). Отсюда снова образуем на каком-либо $(n-1)$-мерном многообразии интегральный инвариант:

$$\iint\ldots\int d\omega. \tag{9}$$

Конкретно, это многообразие считаем ниже замкнутым в том смысле, что оно ограничивает определенную $n$-мерную область. Тогда можно преобразовать (9) в $n$-кратный интеграл по этой области, который при обычной записи в пространственных дифференциалах имеет следующий вид:

$$\iint\ldots\int\left(\frac{\partial\sqrt{a}\xi_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\sqrt{a}\xi_n}{\partial x_n}\right)dx_1dx_2\ldots dx_n. \tag{10}$$

Остается внести в числитель и знаменатель $\sqrt{a}$ для выделения локального инварианта

$$\frac{\dfrac{\partial\sqrt{a}\xi_1}{\partial x_1}+\ldots+\dfrac{\partial\sqrt{a}\xi_n}{\partial x_n}}{\sqrt{a}}. \tag{11}$$

*Его надо считать дивергенцией нашего векторного поля (7), поскольку он имеет такой смысл в случае прямоугольных координат.*

Весь этот расчет, насколько мне известно, дал впервые Бельтрами, конечно, применяясь к специальному случаю $n=3$ в соответствующем геометрическом оформлении. Желательно посмотреть его «Исследования по кинематике жидкостей», часть I («Ricerche sulla cinematica dei fluidi», I. Memoria di Bologna (3), I, 1871=Соч. II).

## § 3. Липшиц и Кристоффель: образование инвариантов дифференцированием и исключением, в частности, «контрагредиентным дифференцированием»

Методы построения инвариантов, обсуждавшиеся в предыдущем параграфе, можно назвать «трансцендентными» в том смысле, что при их обосновании используется не только дифференцирование, но также интегрирование. Напротив, сейчас мы вернемся к элементарному подходу, который в разделе C нас уже привел к фундаментальному инварианту $[\Omega]$ (форма, входящая в риманову кривизну) и основные идеи которого можно в основном представить так:

«Пусть речь идет об образовании таких инвариантов, которые, если вообще содержат дифференциалы от $x_i$, то лишь первые. Если мы имеем уже такой инвариант J, то, естественно, $\delta J$ или $\delta\delta J, \ldots$ или всякие комбинации таких выражений сами тоже инвариантны. Если такая комбинация содержит вторые, но не более высокие дифференциалы от $x_i$, таковые можно устранить вычитанием подходящих сумм инвариантов, встречающихся в теории геодезических линий, отчего тогда снова получается инвариант с одними первыми дифференциалами».

Так способ Липшица был изложен в журнале Крелля 72, с. 16—17 (1870), и он был применен в первую очередь для возможно более непосредственного расчета квадрилинейного инварианта $\Psi(d'x, \delta'x, dx, \delta x)$, из которого получается наше $[\Omega]$, если подставить $d'x = dx$, $\delta'x = \delta x$. Липшиц там продолжает: «На том же принципе основан метод господина Кристоффеля (Журнал Крелля 70, S. 57, 1869) для того, чтобы из ковариантной с $f(x)$ полилинейной формы

$$F(d^{(1)}x, d^{(2)}x, \ldots, d^{(n)}x)$$

получить форму со сходными свойствами, но с численностью системы дифференцирования на единицу больше».

Упоминаемый метод надо здесь изложить, потому что он оказывается основополагающим как для собственных построений его выдвигает на передний план Риччи в своем Calcolo assoluto и называет «ковариантным» дифференцированием; мы сами, соответственно установившемуся у нас словоупотреблению, скорее, можем, говорить о контрагредиентном дифференцировании[1].

Начнем с простейшего примера. Пусть дано выражение Пфаффа

$$\sum_i u_i dx_i \tag{12}$$

(т. е. в сущности поле контрагредиентных векторов $u_1 \ldots u_n$) и этим оно само собой принимается за одну из основных форм в ряду инвариантов,

[1]Терминология Риччи сейчас укоренилась почти всюду. Ср. примечание 1, стр. 195. При $a_{ik} = \text{const}$, т. е. для евклидовых пространств, ковариантное дифференцирование переходит в обычное. — *Прим. ред.*

выписываемых нами ниже. Образуем $\delta(\sum u_i dx_i)$ и раскрываем следующим образом:

$$\delta\Big(\sum u_i dx_i\Big) = \sum_{i,\,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k + \sum_r u_r \partial dx_r. \tag{13}$$

С другой стороны, в теории геодезических линий (стр. 202) мы составили когредиентный вектор:

$$\delta dx_r + \sum_{i,\,k} \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} dx_i \delta x_k$$

(выражение в скобках понимается как известный символ Кристоффеля второго рода). Комбинирование дает следующий инвариант:

$$\sum_r u_r \delta dx_r + \sum_{i,\,k,\,r} \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} u_r dx_i \delta x_k. \tag{14}$$

Вычитаем (14) из (13) и получаем в качестве еще одного инварианта, содержащего уже только первые дифференциалы, билинейную форму:

$$\sum_{i,\,k} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_r \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} u_r \right] dx_i \delta x_k, \tag{15}$$

которую сокращенно будем обозначать

$$(\delta) \left( \sum_i u_i dx_i \right). \tag{15$'$}$$

Это был, как мы указали, простейший пример; принцип же выкладок сохраняется и при замене линейной формы (12) на любую мультилинейную. Так, положим в основу билинейную форму

$$\sum_{i,\,k} u_{ik} dx_i d' x_k. \tag{16}$$

Сперва при этом непосредственно выводится инвариант:

$$\delta\Big(\sum_{i,\,k} u_{ik} dx_i d' x_k\Big) = \sum_{i,\,k,\,l} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} dx_i d' x_k \delta x_l + \\ + \sum_{r,\,k} u_{rk} d' x_k \delta dx_r + \sum_{i,\,s} u_{is} dx_i \delta d' x_s, \tag{17}$$

а затем комбинируем инварианты из теории геодезических линий:

$$\sum_{r,k} u_{rk} d'x_k \Big(\delta dx_r + \sum_{i,l} \begin{Bmatrix} i\,l \\ r \end{Bmatrix} dx_i \delta x_l\Big)$$

или (18)

$$\sum_{i,s} u_{is} dx_i \left(\delta d'x_s + \sum_{k,l} \begin{Bmatrix} l\,k \\ s \end{Bmatrix} d'x_k \delta x_l\right).$$

Вычтя из (17) оба выражения (18), находим трилинейный инвариант

$$\sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} - \sum_r \begin{Bmatrix} i\,l \\ r \end{Bmatrix} u_{rk} - \sum_s \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} u_{is}\right) dx_i d'x_k \delta x_l \tag{19}$$

и так далее.

Ничто, конечно, не препятствует отождествлять в этих формулах между собой различные наборы дифференциалов $dx_i$, $d'x_i, \ldots$ и таким образом переходить к дифференциальным формам более высокой алгебраической степени по отдельным наборам дифференциалов. И, наоборот, имеющиеся инварианты высокой степени всегда можно подходящим полярным процессом заменять на мультилинейные формы от различных наборов $dx_i$, $d'x_i, \ldots$

В качестве отдельных выводов можно дать следующие:

1. Контрагредиентная производная самого $ds^2$ или его поляры

$$\sum a_{ik} dx_i d'x_k$$

тождественно равна нулю (Ricci, Levi-Civita, Math. Ann. 54, S. 138).

2. Если в (15) вместо $dx_i$, $\delta x_k$ подставить когредиентные им $a^{ik}$, получается

$$\sum_{ik} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_r \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} u_r\right] a^{ik}, \tag{20}$$

а это рациональная форма дивергенции векторного поля $u$ (которая выше, стр. 222, была выведена в иррациональной форме); ср. Math. Ann. 54, S. 195.

3. Чтобы получить коэффициенты $(ik, rs)$ формы, определяющей риманову кривизну, требуется несколько обходной путь, и лучше заглянуть в конец выкладок. Именно, инвариант Липшица $\Psi$, который мы упоминали выше (стр. 223), связан подстановкой $\sum\limits_p a^{ip} u_p$ вместо $d'x_i$ с другим инвариантом:

$$\sum_{i,k,r,s,p} (ik, rs) a^{ip} u_p \delta' x_k dx_r \delta x_s. \tag{21}$$

Но точно такая трилинейная форма по $\delta' x$, $dx$, $\delta x$ возникает из $\sum\limits_i u_i dx_i$, когда образуем разность

$$(\delta)(\delta')(\sum u_i dx_i) - (\delta')(\delta)(\sum u_i dx_i). \tag{22}$$

Ср. Math. Ann. 54, S. 143. (Так подход к величинам $(ik, rs)$ видел Эйнштейн в своем сочинении об основах общей теории относительно, Ann. d. Phys. 49, 1916).

## § 4. О сочинении Кристоффеля 1869 года

Теперь у нас есть все предпосылки, что сочинение Кристоффеля 1869 г., названное на стр. 193, охарактеризовать с точки зрения его структуры и его результатов; это хорошо дополняет заключительные замечания предыдущего раздела.

1. Как уже было упомянуто ранее, Кристоффель нигде не прибегает ни к интегральному, ни к вариационному исчислению; его вспомогательные средства исчерпываются дифференцированием и алгебраическим исключением.

2. Впрочем, начинает он вовсе не так, как потом это сделали мы, не с развития прямых методов построения инвариантов (или, как он выражается: ковариантов) заданной квадратичной дифференциальной формы $\sum a_{ik} dx_i dx_k$. Напротив, он исходит из *проблемы эквивалентности*: когда можно $\sum a_{ik} dx_i dx_k$ в силу какой-либо подстановки $x_i = \varphi_i(x'_1 \ldots x'_n)$ преобразовать в другую заданную форму? И только начав с этой постановки, он приходит путем сложного исключения лишних членов к понятию инварианта (или коварианта), присущего $ds^2$ и совпадающего с соответствующим инвариантом у $ds'^2$ в случае соблюдения эквивалентности.

Здесь следует заметить: в рамках элементарной (линейной) теории инвариантов тоже можно пытаться брать вопрос об эквивалентности за исходный пункт (ср. в журнале Крелля 62 (1863) Аронгольд: О фундаментальном обосновании теории инвариантов. Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie). Однако чем дальше, тем больше от такого порядка отходят не только потому, что утяжеляются выкладки, но и потому, что не удается распознать, до какой степени рассмотрениям, верным в общей постановке, можно доверять в специальных случаях. Раньше мы это уже затрагивали[1].

---

[1]Риман в своей работе на премию тоже задается сперва вопросом об эквивалентности: когда можно перевести $\sum a_{ik} dx_i dx_k$ в $ds^2$ с постоянными коэффициентами? Но, получив довольно сложным образом условия $(ik, rs) = 0$, он со словами: «Чтобы лучше просматривались ценные свойства этих выражений» — обращается прямо к закону составления $[\Omega]$, как это у нас представлено выше в разделах B и C.

3. Как бы то ни было, Кристоффелю с его громоздким формальным аппаратом удалось продвинуться до того, чтобы из билинейной формы

$$G_2 = \sum a_{ik} dx_i \delta x_k$$

(поляры $ds^2$) вывести квадрилинейный ковариант $G_4$, который с точностью до числового множителя совпадает с $\Psi$, встречающимся у Липшица, и может рассматриваться как поляра формы $[\Omega]$, определяющей риманову кривизну.

4. Из своего $G_4$ Кристоффель получает повторным применением контрагредиентного дифференцирования еще бесконечное множество мультилинейных инвариантов. Итак, имеем бесконечную последовательность дифференциальных форм:

$$G_2,\ G_4,\ G_5,\ G_6,\ G_7, \ldots$$

5. И теперь он устанавливает справедливость теоремы[1], в которой я вижу главный результат его усилий и которую хотел бы назвать *теоремой о редукции*, потому что она сводит вопрос об эквивалентности двух разных $ds^2$ по отношению к произвольным подстановкам $x_i = \varphi_i(x'_1 \ldots x'_n)$ к вопросу об эквивалентности в *линейной* теории инвариантов.

Положение дел таково: Подстановками $x_i = \varphi_i$ у дифференциалов индуцируются линейные подстановки:

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_1} dx'_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_n} dx'_n. \tag{24}$$

С другой стороны, при этих линейных подстановках должна проявляться эквивалентность

$$G_2,\ G_4,\ G_5, \ldots \qquad G'_2,\ G'_4,\ G'_5, \ldots$$

как алгебраических форм (причем $x_1 \ldots x_n$ и $x'_1 \ldots x'_n$ играют роль параметров). Пусть фактически

$$dx_i = c_{i1} dx'_1 + \ldots + c_{in} dx'_n \tag{25}$$

— та замена дифференциалов, которая переводит $G_\nu$ в соответствующие $G'_\nu$. Но она сводится к некоторой функциональной зависимости

$$x_i = \varphi_i(x'_1 \ldots x'_n) \tag{26}$$

[1] Впрочем, без того, чтобы ее высказывать явно; это происходит только уже у Риччи.

не всегда, требуемые ограничения следуют из условия интегрируемости, имеющего для коэффициентов $c_{ik}$, $c_{il}$ вид:

$$\frac{\partial c_{ik}}{\partial x'_l} = \frac{\partial c_{il}}{\partial x'_k}. \tag{27}$$

Теорема Кристоффеля теперь состоит в том, что в наших специфических условиях (для последовательности форм $G_2$, $G_4$, $G_5, \ldots$) интегрируемость получается *сама собой*, так что поставленный вопрос об эквивалентности полностью сводится к проблеме *линейной* эквивалентности.

Как видно, данная теорема расширяет область применения теории линейных инвариантов. Но результат нельзя, пожалуй, рассматривать как особенно простой. Уже вопрос, будут ли эквивалентны — в смысле зависимости от дифференциалов — $G_2$ и $G_4$ с $G'_2$ и $G'_4$, лежит далеко за пределами достижимости явно сформулированных методов элементарной теории инвариантов.

6. Чтобы проследить за дальнейшими понятиями, мы должны задержаться на том, как Кристоффель использует свою теорему. Для этого он вводит разделение на два радикально различающихся случая:

$\alpha$) или $ds^2$ переходит (как мы сегодня выражаемся) в себя благодаря некоторой непрерывной группе преобразований,

$\beta$) или же таких подстановок нет вовсе, или их только конечное число.

7. Случай $\alpha$), в известной мере более интересный, поскольку он охватывает оба конкретных случая $K_R = 0$ и $K_R = \text{const}$, Кристоффель оставляет в стороне. Я предлагаю, что это был не его изначальный план, но следствие более поздней разочарованности. Ранее ведь он успел вплотную заняться именно такими случаями с $n = 2$[1]. Но уже при $n = 3$ надо рассматривать значительное число появляющихся возможностей. Они только тогда были расставлены по местам, когда Ли создавал общую теорию непрерывных групп преобразований. Надо учесть, что при заданном $ds^2$ возникает всегда только группа с конечным числом параметров и как раз этим «конечным» группам посвятил Ли свой большой обзорный труд, вышедший в 1888—1893[2]. Затем Бианки прямо перечислил все встречающиеся при $n = 3$ возможности[3]. Далее прослеживать эти вещи мы не можем.

---

[1]Общая теория геодезических треугольников. Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Math. Abhandlungen der Berliner Akademie (= Christoffel, Собр. Соч. I, с. 297 и след.).

[2]Теория групп преобразований. 3 тома, Лейпциг, 1888—1893. При содействии Фр. Энгеля.

[3]Memoria della Società Italiana delle Scienze, ser. 3a, t. XI, 1897.

8. Тем обстоятельнее обсуждает Кристоффель случай $\beta$). Если вообще налицо ситуация с изолированной подстановкой, переводящей $ds^2$ в $ds'^2$, то эта изолированность должна сказаться уже при проверке линейной эквивалентности какого-то конечного числа последовательности $G_2$, $G_4$, $G_5, \ldots$ с соответствующими $G_2'$, $G_4'$, $G_5, \ldots$. Общая оценка сверху для числа этих членов, которая была бы достаточна в каждом конкретном случае, однако, не дается. И, вероятно, сказанное Кристоффелем о доказательстве эквивалентности посредством сравнения линейных инвариантов, выступающих с обеих сторон, еще нуждается в проверке.

---

Отмечу теперь, как связана теорема о редукции, данная Кристоффелем, с рассуждениями, приведенными в конце предыдущего раздела (стр. 217 и след.).

Пусть $ds^2$ и $ds'^2$ эквивалентны, притом что точке $O$ пространства $x$ соответствует точка $O'$ пространства $x'$.

Тогда $G_2$, $G_4$, $G_5, \ldots$ в точке O и $G_2'$, $G_4'$, $G_5, \ldots$ в точке $O'$, т.е. по существу две последовательности дифференциальных форм с постоянными коэффициентами, которые удобно записывать как

$$G_2^0,\ G_4^0,\ G_5^0, \ldots \quad \text{и} \quad G_2'^0,\ G_4'^0,\ G_5'^0, \ldots, \tag{28}$$

должны быть линейно эквивалентны между собой. Можно добиться некоторого упрощения, введя с обеих сторон нормальные координаты Римана $y_1 \ldots y_n$ и $y_1' \ldots y_n'$. Таким путем $G_2^0$ и $G_2'^0$ или просто $ds^2$ и $ds'^2$ превращаются в $\sum dy_i^2$ и $\sum dy_i'^2$, так что линейная эквивалентность необходимым образом связана с ортогональной заменой (не только $dy_i$, но в приближении постоянных коэффициентов, также самих $y_i$). Охарактеризовав таким образом подстановку, в дальнейшем мы можем устранить $G_2^0$ и $G_2'^0$ из последовательности сравниваемых форм. Но эквивалентность $G_4^0$, $G_5^0, \ldots$ с $G_4'^0$, $G_5'^0, \ldots$ должна осуществляться за счет какой-либо ортогональной подстановки.

Тогда известная нам $y_4^0$ с точностью до числового коэффициента соответствует квадрилинейной поляре дифференциального выражения Римана:

$$\sum (ik,\, rs)_0 (dy_i \delta y_k - \delta y_i dy_k)(dy_r \delta y_s - \delta y_r dy_s). \tag{29}$$

Определенные выкладки, которые, к сожалению, мы не можем здесь привести, показывают далее, что $G_5^0$, $G_6^0, \ldots$ сходным образом — при отбрасывании членов, которые в начале координат относительно малы и не участвуют в сравнении — соответствуют[1]

$$\begin{aligned}&\sum(ik,\, rs)_1(dy_i\delta y_k - \delta y_i dy_k)(dy_r\delta y_s - \delta y_r dy_s)\\ &\sum(ik,\, rs)_2(\text{——})(\text{——})\end{aligned} \tag{29'}$$

и т. д., где под $(ik,\, rs)_1$, $(ik,\, rs)_2$ понимаются члены первой, второй и т. д. степени, возникающие при разложении $(ik,\, rs)$ в ряд по степеням $y_i$. Следовательно, теорема Кристоффеля сводится к утверждению, что эти последовательные выражения должны проявлять эквивалентность соответствующим штрихованным выражениям при одной и той же ортогональной замене $y_i$, тогда точно та же эквивалентность распространяется и на все выражение

$$\sum(ik,\, rs)(dy_i\delta y_k - \delta y_i dy_k)(dy_r\delta y_s - \delta y_r dy_s) \tag{30}$$

в сравнении с соответствующим выражением в штрихованных переменных.

Ортогональные подстановки в эту формулировку оказываются допущенными настолько, насколько при заданном O остаются неопределенными нормальные координаты $y_i$ ввиду тех же ортогональных подстановок. По сути дела, теорема Кристоффеля в точности сводится к утверждению стр. 217, что вместе с заданием выражения 30 полностью определяется и нормированное $ds^2$. Можно сказать, теорема Кристоффеля в применении к произвольной системе координат нам дает то же, что уже было развито на стр. 217 для специальной системы координат.

Данный ход мыслей я смог представить здесь только эскизно, но я очень надеюсь, что найдутся те или иные подкрепляющие соображения. Стоит посмотреть, например, представленную 25 января 1918 Геттингенскому обществу заметку Эммы Нетер «Инварианты произвольных дифференциальных выражений» (Invarianten beliebiger Differentialausdrücke)[2].

## § 5. Характеристика инвариантов бесконечно малыми преобразованиями (Ли)

По своей природе бесконечно малые преобразования — это только особый способ описания вариаций каких-либо параметров; новое же в

[1]Подразумевается, что при выписывании (29′) все «лишние» дифференциалы заменены на сами переменные $y_i$. — *Прим. перев.*

[2]Ср. далее: Вермейл: Дифференциальные инварианты квадратичных дифференциальных форм. Differentialinvarianten bei quadriatischen Differentialformen, Math.Ann. 79 (1919), так же как Г. Вейль (H. Weyl) *Пространство, время, вещество* (Raum, Zeit, Materie); Приложение 1 к 5 изданию, Берлин 1925.

сравнении с работами первых десятилетий 19-го столетия лежит в их связи как с понятием группы, так и с теорией инвариантов.

Что инварианты группы линейных преобразований можно характеризовать их поведением по отношению к бесконечно малым преобразованиям и что это проявляется в существовании линейных дифференциальных уравнений в частных производных для инвариантов, было, видимо, впервые замечено Сильвестром (1852). Достаточно простейшего примера для прояснения основных идей.

Рассмотрим бинарную квадратичную форму

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \tag{31}$$

(с постоянными коэффициентами) и поинтересуемся, есть ли такие целые рациональные комбинации второй степени из $a_{ik}$, которые инвариантны относительно унимодулярных линейных подстановок:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 &= \gamma x_1' + \delta x_2' \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1). \tag{32}$$

Для этого заметим — я поступаю без особых уловок, — что среди подстановок (32) имеются следующие бесконечно малые:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1+\varepsilon)x_1' \\ x_2 &= (1-\varepsilon)x_2', \end{aligned} \quad (33a) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1' + \eta x_2' \\ x_2 &= x_2', \end{aligned} \quad (33b) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1' \\ x_2 &= \zeta x_1' + x_2' \end{aligned} \quad (33c)$$

(из которых самые общие подстановки (32) можно составлять посредством многократных повторов и комбинирования). Подстановки (33) можно написать и так:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -\varepsilon x_1 \\ \delta x_2 &= +\varepsilon x_2, \end{aligned} \quad (34a) \qquad \begin{aligned} \delta x_1 &= -\eta x_2 \\ \delta x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (34b) \qquad \begin{aligned} \delta x_1 &= 0 \\ \delta x_2 &= -\zeta x_1. \end{aligned} \quad (34c)$$

Прежде всего речь идет о тех заменах, которые при применении (33), (34) испытывают коэффициенты $a_{ik}$ формы $f$[1]. Находим:

при $a$)

$$f = a_{11}' x_1'^2 + 2a_{12}' x_1' x_2' + a_{22}' x_2' = a_{11}(1+2\varepsilon)x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}(1-2\varepsilon)x_2'^2$$

[1]Естественно, подразумевается отбрасывание членов высшей степени относительно $\varepsilon$, $\eta$, $\zeta$.

и тем самым

$$\delta a_{11} = 2\varepsilon a_{11},\ \delta a_{12} = 0,\ \delta a_{22} = -2\varepsilon a_{22}. \tag{35a}$$

Соответственно при $b$) и $c$)

$$\delta' a_{11} = 0,\ \delta' a_{12} = \eta a_{11},\ \delta' a_{22} = 2\eta a_{12}, \tag{35b}$$

$$\delta'' a_{11} = 2\zeta a_{12},\ \delta'' a_{12} = \zeta a_{22},\ \delta'' a_{22} = 0. \tag{35c}$$

Приращения, которые получает инвариант $J(a_{11}, a_{12}, a_{22})$ при этих бесконечно малых преобразованиях, должны обращаться в нуль. Из этого получаем три дифференциальных уравнения в частных производных, совместно характеризующие $J$ как инвариант[1]:

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial J}{\partial a_{11}} - a_{22}\frac{\partial J}{\partial a_{22}} &= 0,\\ a_{11}\frac{\partial J}{\partial a_{12}} + 2a_{12}\frac{\partial J}{\partial a_{22}} &= 0,\\ 2a_{12}\frac{\partial J}{\partial a_{11}} + a_{22}\frac{\partial J}{\partial a_{12}} &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Но искомый $J$ (если мы хотим остаться с нашим простейшим примером) должен быть суперпозицией произведений второй степени:

$$a_{11}^2,\ a_{11}a_{12},\ a_{11}a_{22},\ a_{12}^2,\ a_{12}a_{22},\ a_{22}^2,$$

откуда нетрудно заключить, что с точностью до числового множителя $J$ совпадает с

$$\triangle = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{37}$$

Сходное положение с более сложными примерами. Нужно сразу представить себе, что дает этот метод: Полное вычисление инвариантов высокой степени едва ли может быть целью из-за трудности оперировать с получающимися длинными выражениями. Напротив, сила метода сказывается со стороны расчетов линейно независимых инвариантов заданного строения.

Но тут явилось обобщение, которое мой друг юности, норвежец Софус Ли (который был крестным отцом моей Эрлангенской программы и о работах которого еще много придется сказать в более поздней главе этой книги[2]) развил в целом ряде публикаций, начиная примерно с 1875. На место группы (32) или соответственно порождающих ее бесконечно малых преобразований (33) становится произвольная непрерывная группа

---

[1]Ср. Вейценбек (l.c. S. 2). Также стр. 235. — *Прим. ред.*

[2]Эта глава не была написана. — *Прим. ред.*

подстановок с принадлежащими к ней бесконечно малыми преобразованиями, а для тех величин, из которых желательно составить инвариант, рассчитываются соответствующие «индуцированные» бесконечно малые преобразования.

В качестве группы мы здесь прямо берем ту самую $G_\infty$, которой вообще ныне занимаемся, это просто совокупность всех аналитических подстановок

$$x_i = \varphi_i(x'_1 \ldots x'_n). \tag{38}$$

Она порождается бесконечно малыми подстановками такого вида:

$$\delta x_1 = f_1(x_1 \ldots x_n), \ \ldots, \quad \delta x_n = f_n(x_1 \ldots x_n), \tag{39}$$

где под $f$ обычно понимаются аналитические функции $(x_1 \ldots x_n)$, значение которых вместе с их производными, в выбранной для наших действий области можно считать бесконечно малыми.

Пусть ради простоты опять $n = 2$, объектом же, на котором мы образуем инварианты, является квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = E\,dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2, \tag{40}$$

так что мы должны начать с тех подстановок, индуцируемых формулами (39), которым подвергаются $dx_i$, затем $E$, $F$, $G$, затем их первые и вторые частные производные по $x_1$, $x_2$. Эти подстановки выражаются довольно пространным образом, поскольку выступающие в (39) функции $f_i$ используются в расчетах не только сами, но вместе со своими первыми и вторыми производными. С таким аппаратом можно, например, констатировать, что гауссова кривизна в самом деле — инвариант (40), когда в основу положена наша группа $G_\infty$. Индуцируемые подстановки другого вида для частных производных какой-либо предложенной функции $F(x_1 \ldots x_n)$ привлекаются, если мы хотим продемонстрировать аналог дифференциального параметра Бельтрами и т. д. Это выполнено в 16 томе Acta Mathematica учеником Ли, поляком Зоравским (Zorawski).

Если бы его расчеты сводились чисто к проверке известных результатов, то ценились бы довольно скромно. Но фактически значение этих расчетов простирается дальше, так как показано, что в данном случае отсутствуют более простые инварианты, чем названные. При больших $n$, как и следовало ожидать, инварианты становятся весьма многочисленными. Вычисления с этой точки зрения провел другой ученик Ли, американец Гаскинс (Haskins); ср. Transactions of the American Mathematical Society, vol. III, 1902.

Я не собираюсь вдаваться в детали. Однако в следующем параграфе я хочу еще показать на примере, как полезно иногда связывание выкладок обсуждаемого рода с интегральными методами вариационного исчисления. Недостаток школы Ли в том, что она все время избегает подобного связывания.

## § 6. О векторной дивергенции произвольного тензора $t_{ik}$

Поскольку у меня дальше цель показать значение развитых здесь теорий для современной физики[1], я выбираю пример, тесно примыкающий к физическим рассмотрениям второй главы. Это дает повод взять число переменных $n = 4$, а элемент дуги определить простейшим образом:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2, \tag{41}$$

и тогда различие между когредиентными и контрагредиентными величинами исчезает. Если при этом дан симметричный тензор $t_{ik}$ (10-тензор, как мы тогда его называли), то можно вывести относящийся к нему вектор, который нам уже приходилось называть *векторной дивергенцией*. Компоненты такого вектора — это просто

$$\sum \frac{\partial t_{1k}}{\partial x_k}, \ldots, \sum \frac{\partial t_{4k}}{\partial x_k} \tag{42}$$

(смотри стр. 103) и следующие на стр. 123 пояснения его физического смысла. Задача теперь в том, чтобы осмысленно перенести эти построения на случай произвольного $ds^2 = \sum a_{ik} dr_i dx_k$ (с $n$ переменными).

Итак, пусть нам снова дан симметричный тензор $t_{ik}$ (который мы для ясности называем «контрагредиентными, чтобы подчеркнуть, что его компоненты преобразуются подобно $a_{ik}$»).

Далее наряду с $a_{ik}$ вводим и коэффициенты $a^{ik}$ сопряженной формы. К числу инвариантов тогда относится $\sum t_{ik} a^{ik}$, а также, если пойти несколько дальше, но ограничиться бесконечно малой поправкой к $a^{ik}$, обозначаемой $\delta a^{ik}$, инвариантно выражение

$$\sum t_{ik} \delta a^{ik}, \tag{43}$$

равно как и взятый от него интеграл по области:

$$\int \left( \sum t_{ik} \delta a^{ik} \right) \left( \sqrt{a} dx_1 \ldots dx_n \right). \tag{44}$$

Мы должны специально рассчитать значения $\delta a^{ik}$, возникающие при бесконечно малом преобразовании:

$$x_r = x'_r + f^r(x_1 \ldots x_n). \tag{45}$$

Для этого надо прежде всего вспомнить, что при произвольных преобразованиях $x_i$ коэффициенты $a^{ik}$ ведут себя когредиентно к произведениям $dx_i dx_k$. С другой стороны, мы сразу будем пренебрегать членами

[1] Ср. Предисловие. — *Прим. ред.*

высшего порядка по бесконечно малым $f^r$ или их производным. Обозначив

$$\frac{\partial f^k}{\partial x_r} = f_r^k,$$

находим после недолгого промежуточного вычисления:

$$a^{ik'}(x_1' \dots x_n') = a^{ik}(x_1 \dots x_n) - \sum_r a^{ir} f_r^k - \sum_r a^{kr} f_r^i. \tag{46}$$

Однако

$$a^{ik'}(x_1' \dots x_n')$$

надлежит заменить на

$$a^{ik'}(x_1' \dots x_n') - \sum_k \frac{\partial a^{ik'}}{\partial x_r} f^r.$$

Таким образом оказывается

$$\delta a^{ik} = a^{ik'}(x_1' \dots x_n') - a^{ik}(x_1 \dots x_n) = \sum_r \left( \frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r} f^r - a^{ir} f_r^k - a^{kr} f_r^i \right). \tag{47}$$

С этими значениями $\delta a^{ik}$ вернемся к интегралу (44). Оставаясь интегральным инвариантом, он приобретает новый вид:

$$\int \left( \sum_{i,\,k,\,r} t_{ik} \left( \frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r} f^r - a^{ir} f_r^k - a^{kr} f_r^i \right) (\sqrt{a}\, dx_1 \dots dx_n) \right). \tag{48}$$

Преобразуем здесь члены с $f_r^k$ и $f_r^i$ известным приемом интегрирования по частям, принимая в то же время, что вектор $f^r$, в остальном произвольный, на границе области интегрирования исчезает. Поделив еще на 2, получаем инвариант

$$\frac{\int \left( \sum_r f^r \left\{ \sum_{i,\,k} \frac{\partial(\sqrt{a} t_{ir} a^{ik})}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sqrt{a} \sum_{ik} t_{i,k} \frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r} \right\} \right)}{\sqrt{a}} (\sqrt{a}\, dx_1 \dots dx_n), \tag{49}$$

но здесь участвует $f^r$ как совершенно произвольный когредиентный вектор. Заключаем, что выражения

$$\frac{\sum_{i,\,k} \frac{\delta(\sqrt{a} t_{ir} a^{ik})}{\delta x_k} + \frac{1}{2} \sqrt{a} \sum_{i,\,k} t_{ik} \frac{\delta a^{ik}}{\delta x_r}}{\sqrt{a}} \tag{50}$$

при $r = 1, 2, 3, 4$ определяют компоненты контрагредиентного вектора, который мы как раз и называем векторной дивергенцией $t_{ik}$.

Действительно, если $a^{ik}$ постоянны, эти компоненты сводятся к
$$\sum_{i,k}\left(a^{ik}\frac{\partial t_{ir}}{\partial x_k}\right),$$
а в еще более специальном случае, когда $a^{ii}=1$, остальные $a^{ik}=0$, к
$$\sum_k \frac{\partial t_{kr}}{\partial x_k},$$
т. е. к величинам (42). В определенном смысле это значит, что вектор (50) вытекает из (42), как только мы вместо $x$ вводим любые их функции как новые $x$, а возникающие при этом из $\sum dx_i^2$ новое $ds^2$ обозначаем как $\sum a_{ik}dx_idx_k$. Конечно, при этом мы получаем не самый общий $ds^2$, но только связанный с нулевой римановой мерой кривизны. Все же в этом есть обоснованная договоренность, когда и при любом заданном $ds^2$ вектор (50) называют векторной дивергенцией тензора $t_{ik}$. Ведь представленные здесь, достаточно элементарные, расчеты ни в каком месте не испытали бы упрощения от обращения римановой меры кривизны в нуль. — Это точно такой же прием аналогии, которым пользовался Бельтрами, распространяя понятия первого и второго дифференциального параметра на произвольные $ds^2$ — или, наконец, в общем смысле тот прием, который применил сам Риман, когда он выдвинул принцип произвольности $ds^2$ как основы для геометрии $n$-мерного пространства.

## Заключительное замечание

Завершив на этом построения третьей главы, мы не должны упустить из виду, что несмотря на большое число пояснений в нашем изложении освоена только малая часть разработок, имеющихся в литературе, будь то чистый анализ, аналитическая геометрия или аналитическая механика. Но решимся все же приписать нашему изложению некоторую заслугу в выдвижении на передний план определенной логики идейного развития, осознание которой иначе пришло бы с запозданием и слишком бегло.

## Пояснения к третьей главе

1. В сравнении с состоянием, которое было перед глазами Клейна при написании этой главы, современная дифференциальная геометрия $n$ измерений добилась существенного прогресса в двух отношениях.

I. Вновь возникшее понятие *«бесконечно малого параллельного переноса»* углубило понимание теории геодезических линий и гауссовой кривизны и прояснило значение «трехиндексных символов».

II. Благодаря *исчислению Риччи* чисто техническая сторона дела стала достаточно прозрачной для того, чтобы существенные геометрические вопросы не загромождались трудностями формального сорта, как было раньше.

Быстрейшее введение в современную дифференциальную геометрию дает вторая глава труда А. С. Эддингтона *Математическая теория относительности* (Berlin 1925).

Большей работы от читателя требуют нижеследующие, углубленные изложения предмета:

Г. Вейль. *Пространство, время, вещество.*

Т. Леви-Чивита. *Лекции об абсолютном дифференциальном исчислении.*

Основательный обзор всех относящихся сюда работ можно найти в книге: Д. Дж. Струик. *Многомерная дифференциальная геометрия.*

Способ изложения данной области у Клейна и сейчас не утратил своего значения. Можно назвать это закладкой фундамента, на котором стоят современные методы. Кто вырос уже в них, тому грозит опасность, забыв основы, только «вычислять еще дальше». Этому надо противостоять.

Инвариантно-теоретическая формулировка, предпочитаемая Клейном, стоит в таком же отношении к понятию тензора, господствующему в других изложениях, как уравнение

$$bx = a$$

к его общему решению

$$x = \frac{a}{b}.$$

Только с последним возможны быстрые вычисления. Но при критической перемене ситуации приходится возвращаться к предыдущему первоисточнику.

2. Стр. 186: Ср. примечание 4 к первой главе.

3. Стр. 199: Легко понять происхождение *дифференциальных* инвариантов как предельных случаев совместных инвариантов двух или более точек, перемещающихся по какому-то закону при деформации окружающего поля.

4. Стр. 201/202: С § 4,5 сравни в особенности изложение у Эддингтона (цит. выше, примечание 1): читатель может по этому источнику самостоятельно ознакомиться с успехами, которых современное исследование добилось после обзора Клейна.

5. Стр. 212: Формула (19) позволяет инвариантным образом разрешить неопределенность, связанную с остающейся возможностью ортогональных замен системы, чтобы квадратичная форма $\sum K_{ik}^{(n)} dx_i dx_k$ преобразовалась к главным осям, т. е. из нее исчезли бы смешанные члены. Это всегда возможно и притом в сущности единственным образом, если только собственные значения этой формы все различны.

# Именной указатель

**Феликс Клейн**

Лекции о развитии математики в XIX столетии
Том 2

*Дизайнер М. В. Ботя*
*Технический редактор А. В. Широбоков*
*Корректор М. А. Ложкина*

---

Подписано в печать 29.09.02. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 14,18. Уч.-изд. л. 14,34. Гарнитура Антиква.
Бумага офсетная № 1. Тираж 700 экз. Заказ № 1471.
АНО «Институт компьютерных исследований»,
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00
Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов на ФГУИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

# Переводчику второго тома профессору В. А. Антонову — 70 лет

20 мая 1933 г. в Перми родился Вадим Анатольевич Антонов — выдающийся исследователь в астрономии, математической и теоретической физике, автор свыше двухсот научных публикаций и трех монографий. Он является создателем новых научных направлений в динамике звездных систем и теории потенциала.

В 60-е годы им были написаны пионерские работы по теории устойчивости звездных систем. Именно Антонов первым понял, что распределение Максвелла имеет ограниченное применение к звездным системам (критерий Антонова) — отсюда прямой путь к известной сейчас гравитермической катастрофе. Ряд глубоких результатов получен им в теории орбит и интегралов движения. В теории фигур равновесия он творчески развил наследие А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре. Немало сил отдает Антонов и поиску новых путей в квантовой механике.

Вадим Анатольевич Антонов предан науке и великий труженик, обладает феноменальной научной эрудицией. Он — настоящий русский богатырь научной мысли. Его имя украсило бы любую Академию и остается только сожалеть, что он не входит в состав РАН. Как никто другой, Вадим Анатольевич может проникать за крепкую броню математических построений и находить то самое слабое звено, в которое надо ударить.

Доброго Вам здоровья и долгих лет творческой активности, дорогой Вадим Анатольевич.

*Б. Кондратьев*